

TRẦN ĐỨC HUYỀN

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỀ THI ĐẠI HỌC

MÔN TOÁN

THEO TÌNH THẦN MỚI

- CƠ BẢN - BAO QUÁT CHƯƠNG TRÌNH
- ĐỀ - ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM ĐỀ THI 2002
CỦA BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TRẦN ĐỨC HUYỀN

Thạc sĩ toán học

Giáo viên trưởng THPT chuyên Lê Hồng Phong

Phương pháp

GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC

MÔN TOÁN

Theo tinh thần mới

- Cơ bản - bao quát chương trình
- Đáp án và thang điểm đề thi 2002
của Bộ Giáo dục và Đào tạo

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: NGUYỄN VĂN THỎA

Tổng biên tập: NGUYỄN THIÊN GIÁP

Biên tập: NGUYỄN GIANG

Sửa bản in: PHẠM THỊ CẨM TIÊU

Trình bày bìa: NGỌC ANH

Chế bản: CÔNG TY VĂN HÓA BẢO LONG

PHƯƠNG PHÁP GIẢI ĐỀ THI TUYỂN SINH ĐẠI HỌC MÔN TOÁN

Mã số: 01.24.ĐH.2003

In 2000 cuốn, tại Xưởng in Nguyễn Minh Hoàng, Tp. HCM.

Số xuất bản: 178/120/XB-QLXB. Số trích ngang: 62KH/XB

In xong và nộp lưu chiểu tháng 4 năm 2003.

Lời nói đầu

Để giúp các bạn trẻ hiểu học có thêm tài liệu tự học và tự ôn tập chuẩn bị ôn thi vào các trường đại học, chúng tôi biên soạn quyển sách : **"Phương pháp giải đề thi tuyển sinh đại học môn Toán"**.

Sách bao gồm các đề thi mẫu kèm theo bài giải chi tiết để các học sinh có thể kiểm tra lại bài tự làm của mình. Đặc biệt ở phần đầu có đầy đủ các đề thi năm 2002 kèm theo đáp án và thang điểm chi tiết của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Tiếp cận với một số lớn các đề mẫu tuyển sinh, người đọc sẽ hình dung được cụ thể yêu cầu về nội dung kiến thức và kỹ năng tính toán, từ đó xác định được cách thức học tập và rèn luyện để đạt kết quả tốt nhất trong các kì thi. Đặc biệt là các bạn trẻ cần làm quen với cách ra đề theo **PHƯƠNG PHÁP MỚI** của Bộ Giáo dục và Đào tạo đó là chú trọng đến phần kiến thức cơ bản, cách trình bày đáp án đầy đủ và lấy sách giáo khoa làm chuẩn.

Mặc dù đã hết sức cố gắng nhưng những thiếu sót khi biên soạn và in ấn chắc sẽ không tránh khỏi. Chúng tôi mong nhận được những ý kiến đóng góp xây dựng để những lần tái bản sau được tốt hơn.

Tác giả

Trần Đức Huyền

MỤC LỤC

Đề 1	5	Đề 20	165
Đề 2	17	Đề 21	173
Đề 3	25	Đề 22	181
Đề 4	35	Đề 23	193
Đề 5	44	Đề 24	202
Đề 6	54	Đề 25	213
Đề 7	65	Đề 26	219
Đề 8	75	Đề 27	226
Đề 9	83	Đề 28	233
Đề 10	90	Đề 29	242
Đề 11	98	Đề 30	251
Đề 12	103	Đề 31	259
Đề 13	112	Đề 32	270
Đề 14	118	Đề 33	280
Đề 15	124	Đề 34	288
Đề 16	131	Đề 35	293
Đề 17	138	Đề 36	304
Đề 18	148	Đề 37	315
Đề 19	157		

Đề 1

Kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2002

Khối A

Câu I : (ĐH : 2,5 điểm; CĐ : 3,0 điểm)

Cho hàm số : $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (1)

(m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm k để phương trình : $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$ có ba nghiệm phân biệt.
3. Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1).

Câu II : (ĐH : 1,5 điểm; CĐ : 2,0 điểm)

Cho phương trình : $\log_3^2 x + \sqrt{\log_3^2 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (2)

(m là tham số).

1. Giải phương trình (2) khi $m = 2$
2. Tìm m để phương trình (2) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn $[1; 3^{\sqrt{3}}]$.

Câu III : (ĐH : 2,0 điểm; CĐ : 2,0 điểm)

1. Tìm nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình

$$5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$$

2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = |x^2 - 4x + 3|, \quad y = x + 3.$$

Câu IV : (ĐH : 2,0 điểm; CĐ : 3,0 điểm)

1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC đỉnh S, có độ dài cạnh đáy bằng a. Gọi M và N lần lượt là các trung điểm của các cạnh SB và SC. Tính theo a diện tích tam giác AMN, biết rằng mặt phẳng (AMN) vuông góc với mặt phẳng (SBC).
2. Trong không gian với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz cho hai đường thẳng :

$$\Delta_1 : \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases} \quad \text{và} \quad \Delta_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

- a) Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 và song song với đường thẳng Δ_2 .
- b) Cho điểm M(2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc đường thẳng Δ_2 sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

Câu V : (ĐH : 2,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, xét tam giác ABC vuông tại A, phương trình đường thẳng BC là $\sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$, các đỉnh A và B thuộc trục hoành và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 2. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.
2. Cho khai triển nhị thức :

$$\left(2^{\frac{x-1}{2}} + 2^{\frac{-x}{3}} \right)^n = C_n^0 \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right)^n + C_n^1 \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right)^{n-1} \left(2^{\frac{-x}{3}} \right) + \dots + \\ + C_n^{n-1} \left(2^{\frac{x-1}{2}} \right) \left(2^{\frac{-x}{3}} \right)^{n-1} + C_n^n \left(2^{\frac{-x}{3}} \right)^n$$

(n là số nguyên dương). Biết rằng trong khai triển đó $C_n^3 = 5 C_n^1$ và số hạng thứ tư bằng 20n, tìm n và x.

Ghi chú : Thí sinh chỉ thi CAO ĐẲNG không làm câu V.

Giải

Câu 1:

1. Với $m = 1 \Rightarrow y = -x^3 + 3x^2$

Tập xác định $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$y' = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2), \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

$$y'' = -6x + 6 = 0, \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

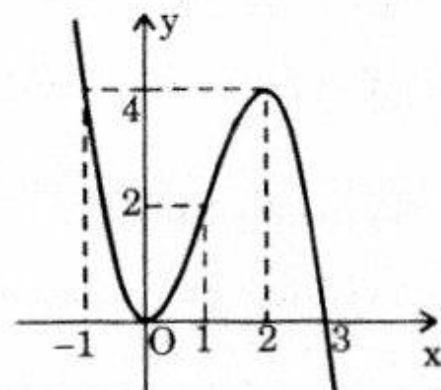
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-
y''		+	0	-	
y	$+\infty$	lõm	U	4	$-\infty$

$\swarrow$ CT 0 $\xrightarrow{2}$ CĐ lồi $\searrow$

$$y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

$$y(-1) = 4$$

Đồ thị:



2. Cách 1:

Ta có: $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x = -k^3 + 3k^2$.

Đặt $a = -k^3 + 3k^2$. Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình:

$$-3x^3 + 3x^2 = a \text{ có 3 nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow 0 < a < 4$$

$$\Leftrightarrow 0 < -k^3 + 3k^2 < 4 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k^2 - 4k + 4) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \neq k < 3 \\ (k+1)(k-2)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases}$$

Cách 2 :

Ta có : $-x^3 + 3x^2 + k^3 - 3k^2 = 0$

$$\Leftrightarrow (x - k)[x^2 + (k - 3)x + k^2 - 3k] = 0$$

có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow f(x) = x^2 + (k - 3)x + k^2 - 3k = 0$

có 2 nghiệm phân biệt khác k

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = -3k^2 + 6k + 9 > 0 \\ k^2 + k^2 - 3k + k^2 - 3k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0 \wedge k \neq 2 \end{cases}$$

3. Cách 1 :

$$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = -3(x - m)^2 + 3$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$$

Ta thấy $x_1 \neq x_2$ và y' đổi dấu khi qua x_1 và $x_2 \Rightarrow$ hàm số đạt cực trị tại x_1 và x_2 .

$$y_1 = y(x_1) = -m^2 + 3m - 2$$

và $y_2 = y(x_2) = -m^2 + 3m + 2$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị

$M_1(m - 1; -m^2 + 3m - 2)$ và $M_2(m + 1; -m^2 + 3m + 2)$ là :

$$\frac{x - m + 1}{2} = \frac{y + m^2 - 3m + 2}{4} \Leftrightarrow y = 2x - m^2 + m$$

Cách 2 :

$$y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2) = -3(x - m)^2 + 3.$$

Ta thấy : $\Delta' = 9m^2 + 9(1 - m^2) = 9 > 0 \Rightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm $x_1 \neq x_2$ và y' đổi dấu khi qua x_1 và x_2 .

Ta có : $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$

$$= \left(\frac{1}{3}x - \frac{m}{3} \right) (-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2) + 2x - m^2 + m$$

Từ đây ta có : $y_1 = 2x_1 - m^2 + m$ và $y_2 = 2x_2 - m^2 + m$.

Vậy phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là :

$$y = 2x - m^2 + m$$

Câu II :

1. Với $m = 2$ ta có : $\log^2_3 x + \sqrt{\log^2_3 x + 1} - 5 = 0$

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log^2_3 x + 1} \geq 1$ ta có :

$$t^2 - 1 + t - 5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -3 \text{ (loại)} \\ t_2 = 2 \end{cases}$$

$$t_2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \log^2_3 x = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \log_3 x = \pm \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 3^{\pm \sqrt{3}}$$

$x = 3^{\pm \sqrt{3}}$ thỏa mãn điều kiện $x > 0$.

2. $\log^2_3 x + \sqrt{\log^2_3 x + 1} - 2m - 1 = 0$ (2)

Điều kiện $x > 0$. Đặt $t = \sqrt{\log^2_3 x + 1} \geq 1$ ta có

$$t^2 - 1 + t - 2m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t^2 + t - 2m - 2 = 0 \quad (3)$$

$$x \in [1, 3^{\sqrt{3}}] \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leq \log_3 x \leq \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad 1 \leq t = \sqrt{\log^2_3 x + 1} \leq 2$$

Vậy (2) có ít nhất 1 nghiệm $\in [1, 3^{\sqrt{3}}]$ khi và chỉ khi (3) có ít nhất 1 nghiệm $\in [1, 2]$. Đặt $f(t) = t^2 + t$.

Cách 1 :

Hàm số $f(t)$ là hàm tăng trên đoạn $[1, 2]$. Ta có $f(1) = 2$ và $f(2) = 1$.

Phương trình : $t^2 + t = 2m + 2$

$$\Leftrightarrow \quad f(t) = 2m + 2 \text{ có nghiệm } \in [1, 2]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 2m + 2 \\ f(2) \geq 2m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq 2m + 2 \\ 2m + 2 \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$$

Cách 2 :

TH 1. Phương trình (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn :

$$1 < t_1 \leq t_2 < 2.$$

Do $\frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{1}{2} < 1$ nên không tồn tại m thỏa mãn trường hợp này.

TH 2. Phương trình (3) có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn

$$\begin{aligned} t_1 \leq 1 \leq t_2 \leq 2 \quad \text{hoặc} \quad 1 \leq t_1 \leq 2 \leq t_2 \\ \Leftrightarrow -2m(4 - 2m) \leq 0 \quad \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2. \end{aligned}$$

Câu III :

$$1. \quad 5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = \cos 2x + 3$$

Điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có :} \quad & 5 \left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) \\ &= \left(\frac{\sin x + 2 \sin x \sin 2x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) \\ &= 5 \left(\frac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2 \sin 2x} \right) \\ &= 5 \left(\frac{(2 \sin 2x + 1) \cos x}{1 + 2 \sin 2x} \right) = 5 \cos x \end{aligned}$$

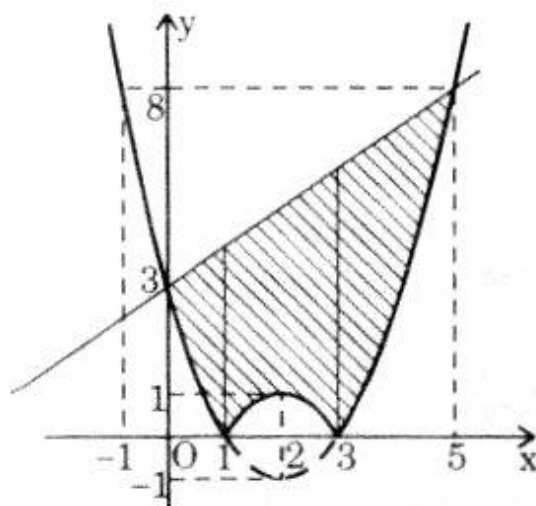
$$\text{Vậy ta có :} \quad 5 \cos x = \cos 2x + 3 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cos^2 x - 5 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ (loại)} \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$\forall x \in (0; 2\pi)$ nên lấy $x_1 = \frac{\pi}{3}$ và $x_2 = \frac{5\pi}{3}$. Ta thấy x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $\sin 2x \neq -\frac{1}{2}$. Vậy các nghiệm cần tìm là :

$$x_1 = \frac{\pi}{3} \quad \text{và} \quad x_2 = \frac{5\pi}{3}.$$

2.



Ta thấy phương trình : $|x^2 - 4x + 3| = x + 3$ có 2 nghiệm :

$$x_1 = 0 \quad \text{và} \quad x_2 = 5.$$

Mặt khác : $|x^2 - 4x + 3| < x + 3, \forall x \in [0; 5]$. Vậy :

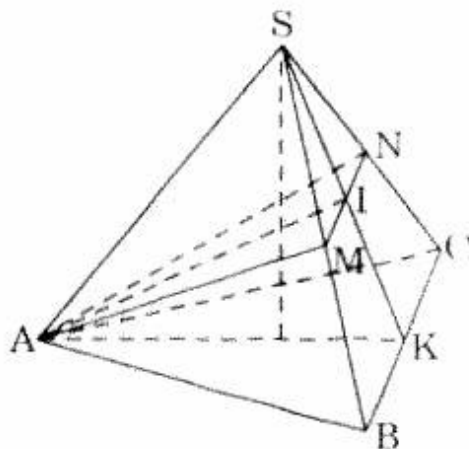
$$\begin{aligned} S &= \int_0^5 (x + 3 - |x^2 - 4x + 3|) dx = \\ &= \int_0^1 (x + 3 - x^2 + 4x - 3) dx + \int_1^3 (x + 3 + x^2 - 4x + 3) dx + \\ &\quad + \int_3^5 (x + 3 - x^2 + 4x - 3) dx \\ &= \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx + \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx \\ &= \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_0^1 + \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x \right) \Big|_1^3 + \left(-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 \right) \Big|_3^5 \\ &= \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6} \text{ (dvdt)}. \end{aligned}$$

Câu IV :

1. Gọi K là trung điểm của BC và $I = SK \cap MN$.

$$\text{Từ giả thiết} \Rightarrow MN = \frac{1}{2}BC = \frac{a}{2},$$

$MN \parallel BC \Rightarrow I$ là trung điểm của SK và MN



Ta có : $\triangle SAB = \triangle SAC \Rightarrow$ hai trung tuyến tương ứng $AM = AN$

$$\Rightarrow \triangle AMN \text{ cân tại } A \Rightarrow AI \perp MN$$

$$\text{Mặt khác : } \begin{cases} (SBC) \perp (AMN) \\ (SBC) \cap (AMN) = MN \\ AI \subset (AMN) \\ AI \perp MN \end{cases}$$

$$\Rightarrow AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SK$$

$$\text{Suy ra : } \triangle SAK \text{ cân tại } A \Rightarrow SA = AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$SK^2 = SB^2 - BK^2 = \frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow AI &= \sqrt{SA^2 - SI^2} = \sqrt{SA^2 - \left(\frac{SK}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{8}} \\ &= \frac{a\sqrt{10}}{4}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có : } S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2}MN \cdot AI = \frac{a^2\sqrt{10}}{16} \text{ (dvdv).}$$

Chú ý :

1. Có thể chứng minh $AI \perp MN$ như sau :

$$BC \perp (SAK) \Rightarrow MB \perp (SAK) \Rightarrow MN \perp AI.$$

2. Có thể làm theo phương pháp tọa độ :

Chẳng hạn chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz sao cho :

$$K(0; 0; 0), \quad B\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right), \quad A\left(0; \frac{-a\sqrt{3}}{2}; 0\right), \quad S\left(0; \frac{-a\sqrt{3}}{6}; h\right)$$

trong đó h là độ dài đường cao SH của hình chóp S.ABC.

2.a)

Cách 1 : Phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng Δ_1 có dạng :

$$\alpha(x - 2y + z - 4) + \beta(x + 2y - 2z + 4) = 0 \quad (\alpha^2 + \beta^2 \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x - (2\alpha - 2\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 4\alpha + 4\beta = 0$$

Vậy : $\vec{n}_P = (\alpha + \beta; 2\beta - 2\alpha; \alpha - 2\beta).$

Ta có : $\vec{u}_2 = (1; 1; 2) // \Delta_2$ và $M_2(1; 2; 1) \in \Delta_2$

$$(P) // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_P \cdot \vec{u}_2 = 0 \\ M_2(1; 2; 1) \notin (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha - \beta = 0 \\ M_2 \notin (P) \end{cases}$$

Vậy : (P) : $2x - z = 0$.

Cách 2 : Ta có thể chuyển phương trình Δ_1 sang dạng tham số như sau :

Từ phương trình Δ_1 suy ra : $2x - z = 0$.

$$\text{Đặt : } x = 2t' \Rightarrow \Delta_1 : \begin{cases} x = 2t' \\ y = 3t' - 2 \\ z = 4t' \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1(0; -2; 0) \in \Delta_1, \quad \vec{u}_1 = (2; 3; 4) // \Delta_1.$$

(Ta có thể tìm tọa độ điểm $M_1 \in \Delta_1$ bằng cách cho $x = 0 \Rightarrow y = -2$,

$$z = 0 \text{ và tính } \vec{u}_1 = \left(\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (2; 3; 4).$$

Ta có : $\vec{u}_2 = (1; 1; 2) // \Delta_2$. Từ đó ta có vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là : $\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2; 0; -1)$.

Vậy phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M_1(0; -2; 0)$ và vuông góc $\vec{n}_p = (2; 0; -1)$ là : $2x - z = 0$.

Mặt khác : $M_2(1; 2; 1) \notin (P)$

$\Rightarrow$ phương trình mặt phẳng cần tìm là : $2x - z = 0$.

2.b)

$$\text{Cách 1 : } H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t, 2+t, 1+2t)$$

$$\Rightarrow \vec{MH} = (t-1; t+1; 2t-3)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow MH &= \sqrt{(t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2} \\ &= \sqrt{6t^2 - 12t + 11} = \sqrt{6(t-1)^2 + 5} \end{aligned}$$

đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi : $t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3)$.

$$\text{Cách 2 : } H \in \Delta_2 \Rightarrow H(1+t; 2+t; 1+2t).$$

$$MH \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow MH \perp \Delta_2 \Leftrightarrow \vec{MH} \cdot \vec{u}_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow H(2; 3; 3).$$

Câu V :

1. Ta có : $BC \cap Ox = B(1; 0)$.

Đặt $x_A = a$ ta có : $A(a; 0)$ và $x_C = a \Rightarrow y_C = \sqrt{3}a - \sqrt{3}$.

Vậy : $C(a; \sqrt{3}a - \sqrt{3})$.

Từ công thức :

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) \\ y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \end{cases}$$

ta có :

$$G\left(\frac{2a+1}{3}; \frac{\sqrt{3}(a-1)}{3}\right)$$

Cách 1 :

Ta có : $AB = |a-1|$, $AC = \sqrt{3}|a-1|$, $BC = 2|a-1|$.

Do đó : $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{\sqrt{3}}{2}(a-1)^2$

Ta có : $\gamma = \frac{2S}{AB+AC+BC} = \frac{\sqrt{3}(a-1)^2}{3|a-1|+\sqrt{3}|a-1|} = \frac{|a-1|}{\sqrt{3}+1} = 2$

Vậy : $|a-1| = 2\sqrt{3} + 2$

TH 1. $a_1 = 2\sqrt{3} + 3 \Rightarrow G_1\left(\frac{7+4\sqrt{3}}{3}; \frac{6+2\sqrt{3}}{3}\right)$

TH 2. $a_2 = -2\sqrt{3} - 1 \Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3}-1}{3}; \frac{-6-2\sqrt{3}}{3}\right)$

Cách 2 :

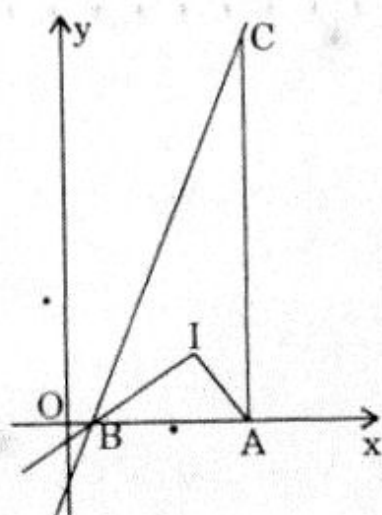
Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp ΔABC .

Vì $r = 2 \Rightarrow y_I = \pm 2$

Phương trình BI :

$$y = \tan 30^\circ \cdot (x-1) = \frac{x-1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow x_1 = 1 \pm 2\sqrt{3}.$$



TH 1. Nếu A và O khác phía đối với B $\Rightarrow x_1 = 1 + 2\sqrt{3}$

Từ $d(I, AC) = 2 \Rightarrow a = x_1 + 2 = 3 + 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow G_1\left(\frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}; \frac{6 + 2\sqrt{3}}{3}\right)$$

TH 2. Nếu A và O cùng phía đối với B $\Rightarrow x_1 = 1 - 2\sqrt{3}$

Tương tự ta có : $a = x_1 - 2 = -1 - 2\sqrt{3}$

$$\Rightarrow G_2\left(\frac{-4\sqrt{3} - 1}{3}; \frac{-6 - 2\sqrt{3}}{3}\right)$$

2. Từ : $C_n^3 = 5C_n^1 \quad (n \geq 3)$

Ta suy ra : $n(n-1)(n-2) = 5n$

$$\Leftrightarrow n^2 - 3n - 28 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 7$$

Từ số hạng thứ tư bằng $20n$, ta suy ra :

$$C_7^3 \left(2^{\frac{x-1}{2}}\right)^4 \left(x^{-\frac{x}{3}}\right)^3 = 20.7$$

$$\Leftrightarrow 7.5.2^{2x-2}.2^{-x} = 20.7$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-2} = 4$$

$$\Leftrightarrow 2^{2x-2} = 2^2$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = 2$$

$$\Leftrightarrow x = 4$$

Vậy : $\begin{cases} n = 7 \\ x = 4 \end{cases}$

Đề 2

Kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2002

Khối B

Câu I : (ĐH : 2,0 điểm; CĐ : 2,5 điểm)

Cho hàm số : $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$ (1)

(m là tham số).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 1$.
2. Tìm m để hàm số (1) có ba điểm cực trị.

Câu II : (ĐH : 3,0 điểm, CĐ : 3,0 điểm)

1. Giải phương trình : $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$.

2. Giải bất phương trình : $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$.

3. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$$

Câu III : (ĐH : 1,0 điểm, CĐ : 1,5 điểm)

Tính diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường :

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \quad \text{và} \quad y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$$

Câu IV : (ĐH : 3,0 điểm; CĐ : 3,0 điểm)

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy cho hình chữ nhật ABCD có tâm I $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$, phương trình đường thẳng AB là : $x - 2y + 2 = 0$ và $AB = 2AD$. Tìm tọa độ điểm A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.
2. Cho hình lập phương ABCDA₁B₁C₁D₁ có cạnh bằng a.
 - a) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng A₁B và B₁D.

- b) Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của các cạnh BB_1 , CD , A_1D_1 . Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C_1N

Câu V : (ĐH : 1,0 điểm)

Cho đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2n}$ ($n \geq 2$ nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ nhiều gấp 20 lần số hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$, tìm n.

Ghi chú : Thí sinh chỉ thi CAO ĐẲNG không làm Câu IV 2.b) và Câu V.

Giải

Câu I :

1. Với $m = 1$ ta có :

$y = x^4 - 8x^2 + 10$ là hàm chẵn $\Rightarrow$ đồ thị đối xứng qua Oy.

Tập xác định $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$y' = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4), \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

$$y'' = 12x^2 - 16 = 12\left(x^2 - \frac{4}{3}\right), \quad y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	2	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-	0	+
y''			+	0	-	0	+	
y	$+\infty$			10			$+\infty$	

lõm CT $\xrightarrow{U}$ Đỉnh $\xrightarrow{U}$ lõm CT $\nearrow$
-6 -6 10

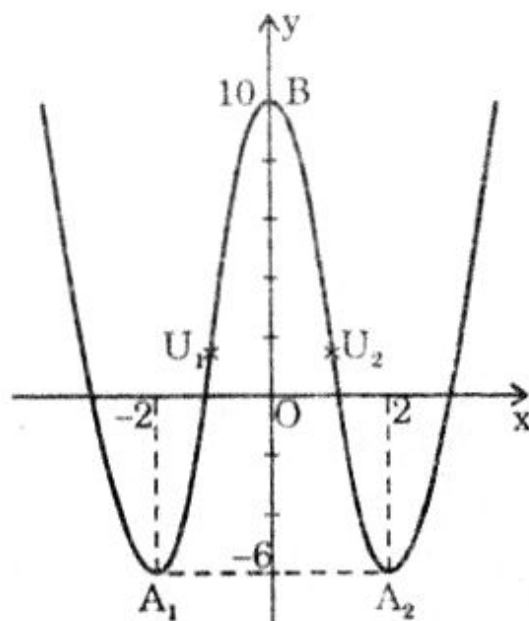
Hai điểm cực tiểu : $A_1(-2; -6)$

và $A_2(2; -6)$

Một điểm cực đại : $B(0; 10)$

Hai điểm uốn : $U_1\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}; \frac{10}{9}\right)$

và $U_2\left(\frac{2}{\sqrt{3}}; \frac{10}{9}\right)$



Giao điểm của đồ thị với trục tung là :

$B(0; 10)$

Đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ :

$$x = \pm \sqrt{4 + \sqrt{6}} \quad \text{và} \quad x = \pm \sqrt{4 - \sqrt{6}}.$$

2. $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 9)x = 2x(2mx^2 + m^2 - 9),$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt (khi đó y' đổi dấu khi qua các nghiệm) $\Leftrightarrow$ phương trình $2mx^2 + m^2 - 9 = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$2mx^2 + m^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ x^2 = \frac{9 - m^2}{2m} \end{cases}$$

có hai nghiệm khác 0 $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3. \end{cases}$

Vậy hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3. \end{cases}$

Câu II :

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x \\
 \Leftrightarrow & \frac{1 - \cos 6x}{2} - \frac{1 + \cos 8x}{2} = \frac{1 - \cos 10x}{2} - \frac{1 + \cos 12x}{2} \\
 \Leftrightarrow & (\cos 12x + \cos 10x) - (\cos 8x + \cos 6x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x (\cos 11x - \cos 7x) = 0 \\
 \Leftrightarrow & \cos x \sin 9x \sin 2x = 0 \\
 \Leftrightarrow & \sin 9x \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{9} \\ x = \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).
 \end{aligned}$$

$$2. \quad \log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1 \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
 \text{Điều kiện : } \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \end{cases} & \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x - 72 > 1 \\ x > \log_9 73 \end{cases} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Do $x > \log_9 73 > 1$ nên :

$$\begin{aligned}
 (1) \Leftrightarrow \log_3(9^x - 72) &\leq x \Leftrightarrow 9^x - 72 \leq 3^x \\
 &\Leftrightarrow (3^x)^2 - 3^x - 72 \leq 0 \quad (3)
 \end{aligned}$$

Đặt $t = 3^x$ thì (3) trở thành :

$$\begin{aligned}
 t^2 - t - 72 &\leq 0 \Leftrightarrow -8 \leq t \leq 9 \\
 \Leftrightarrow -8 &\leq 3^x \leq 9 \Leftrightarrow x \leq 2.
 \end{aligned}$$

Kết hợp với điều kiện (2) ta được nghiệm của bất phương trình là : $\log_9 73 < x \leq 2$.

$$3. \quad \begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x-y \geq 0 \\ x+y \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt[3]{x-y} (1 - \sqrt[6]{x-y}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y + 1 \end{cases}$$

Thay $x = y$ vào (2), giải ra ta được : $x = y = 1$.

Thay $x = y + 1$ vào (2), giải ra ta có : $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$.

Kết hợp với điều kiện (3) hệ phương trình có 2 nghiệm :

$$x = 1, y = 1 \quad \text{và} \quad x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$$

Chú ý :

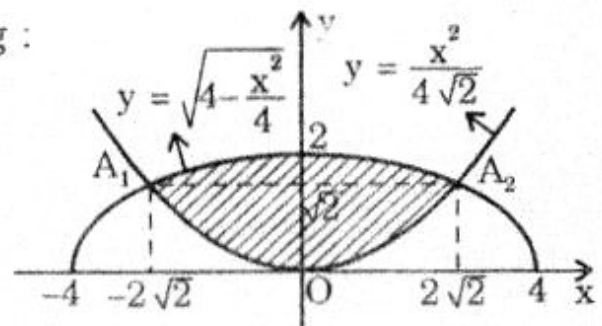
Thí sinh có thể nâng hai vế của (1) lên lũy thừa bậc 6 để đi đến kết quả : $\begin{cases} x = y \\ x = y + 1 \end{cases}$

Câu III :

Tìm giao điểm của hai đường cong :

$$y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$$

và $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$



$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{x^4}{32} + \frac{x^2}{4} - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 8 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{8}$$

Trên $[-\sqrt{8}; \sqrt{8}]$ ta có : $\frac{x^2}{4\sqrt{2}} \leq \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$ và do hình đối xứng qua trục tung nên :

$$S = 2 \int_0^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8}} x^2 dx = S_1 - S_2.$$

Để tính S_1 ta dùng phép biến đổi $x = 4\sin t$, khi $0 \leq x \leq \sqrt{8}$ thì $0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

$$dx = 4\cos t dt \quad \text{và} \quad \cos t > 0, \forall t \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } S_1 &= \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx = 16 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt = \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 2\pi + 4 \end{aligned}$$

$$S_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8}} x^2 dx = \frac{1}{6\sqrt{2}} x^3 \Big|_0^{\sqrt{8}} = \frac{8}{3}.$$

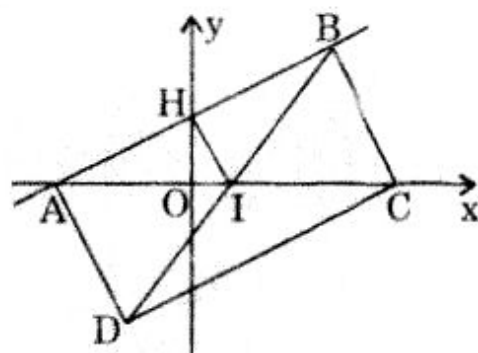
$$\text{Vậy : } S = S_1 - S_2 = 2\pi + \frac{4}{3}.$$

Chú ý : Thí sinh có thể tính diện tích

$$S = \int_{\sqrt{8}}^{\sqrt{8}} \left(\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx.$$

Câu IV :

1. Khoảng cách từ I đến đường thẳng AB bằng $\frac{\sqrt{5}}{2} \Rightarrow AD = \sqrt{5}$ và $IA = IB = \frac{5}{2}$.



Do đó A, B là các giao điểm của đường thẳng AB với đường tròn tâm I và bán kính $R = \frac{5}{2}$. Vậy tọa độ A, B là nghiệm của hệ :

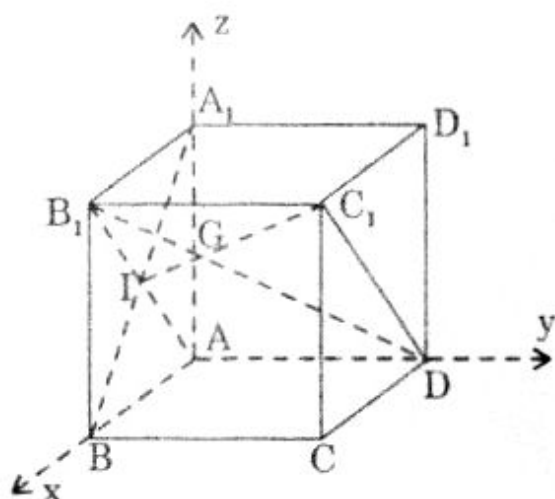
$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Giải hệ ta được : $A(-2; 0), B(2; 2)$ (vì $x_A < 0$)

$$\Rightarrow C(3; 0), D(-1; -2).$$

Chú ý : Thí sinh có thể tìm tọa độ điểm H là hình chiếu của I trên đường thẳng AB. Sau đó tìm A, B là giao điểm của đường tròn tâm H bán kính HA với đường thẳng AB.

2.a) Tìm khoảng cách giữa A_1B và B_1D



Cách 1 : Chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz sao cho :

$$A(0; 0; 0), B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A_1(0; 0; a)$$

$$\Rightarrow C(a; a; 0), B_1(a; 0; a), C_1(a; a; a), D_1(0; a; a)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{A_1B} = (a; 0; -a), \overrightarrow{B_1D} = (-a; a; -a), \overrightarrow{A_1B_1} = (a; 0; 0) \text{ và}$$

$$[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}] = (a^2; 2a^2; a^2).$$

$$\text{Vậy : } d(A_1B, B_1D) = \frac{|[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}] \cdot \overrightarrow{A_1B_1}|}{|[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}]|} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a}{\sqrt{6}}.$$

$$\text{Cách 2 : } \left. \begin{array}{l} A_1B \perp AB_1 \\ A_1B \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow A_1B \perp (AB_1C_1D) \Rightarrow A_1B \perp B_1D$$

$$\text{Tương tự : } A_1C_1 \perp B_1D \Rightarrow B_1D \perp (A_1BC_1).$$

Gọi $G = B_1D \cap (A_1BC_1)$. Do $B_1A_1 = B_1B = B_1C_1 = a$ nên :

$GA_1 = GB = GC_1 \Rightarrow G$ là tam giác đều A_1BC_1 có cạnh bằng $a\sqrt{2}$.

Gọi I là trung điểm của A_1B thì IG là đường vuông góc chung của A_1B và B_1D , nên : $d(A_1B, B_1D) = IG = \frac{1}{3} C_1B = \frac{1}{3} A_1B \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Chú ý :

Thí sinh có thể viết phương trình mặt phẳng (P) chứa A_1B và song song với B_1D là : $x + 2y + z - a = 0$ và tính khoảng cách từ B_1 (hoặc từ D) tới (P), hoặc viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa B_1D và song song với A_1B là : $x + 2y + z - 2a = 0$ và tính khoảng cách từ A_1 (hoặc từ B) tới (Q).

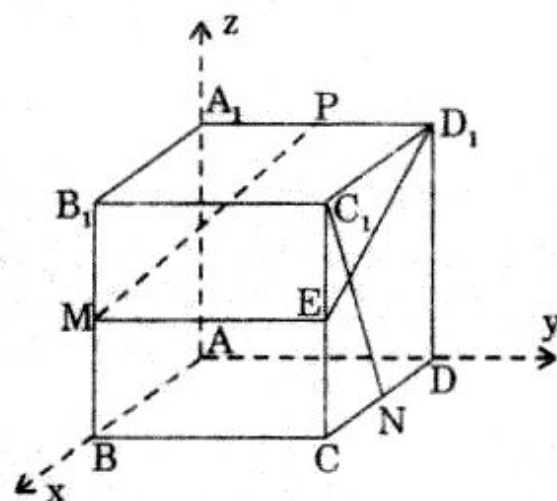
2.b) Cách 1 :

Từ cách 1 của 2a) ta tìm được :

$$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right), \quad N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right), \quad P\left(0; \frac{a}{2}; a\right)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right), \quad \overrightarrow{NC_1} = \left(\frac{a}{2}; 0; a\right) \Rightarrow \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{NC_1} = 0$$

Vậy : $MP \perp C_1N$.



Gọi E là trung điểm của CC_1 thì $ME \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow$ hình chiếu vuông góc của MP trên (CDD_1C_1) là ED_1 . Ta có :

$$\begin{aligned} \Delta C_1CN &= \Delta D_1C_1E \Rightarrow \widehat{C_1D_1E} = \widehat{CC_1N} = 90^\circ - \widehat{D_1C_1N} \\ &\Rightarrow D_1E \perp C_1N. \end{aligned}$$

Từ đây theo định lí ba đường vuông góc ta có $MP \perp C_1N$.

Câu V :

Số tam giác có các đỉnh là 3 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ là C_{2n}^3 .

Gọi đường chéo của đa giác đều $A_1A_2 \dots A_{2n}$ đi qua tâm đường tròn (O) là đường chéo lớn thì đa giác đã cho có n đường chéo lớn.

Mỗi hình chữ nhật có các đỉnh là 4 trong $2n$ điểm $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ có các đường chéo là hai đường chéo lớn. Ngược lại, với mỗi cặp đường chéo lớn ta có các đầu mút của chúng là 4 đỉnh của một hình chữ nhật. Vậy số hình chữ nhật nói trên bằng số cặp đường chéo lớn của đa giác $A_1A_2 \dots A_{2n}$ tức C_{2n}^2 .

Theo giả thiết thì : $C_{2n}^3 = 20 C_{2n}^2$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = 20 \frac{n!}{2!(n-2)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2n \cdot (2n-1)(2n-2)}{6} = 20 \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2n-1 = 15 \quad \Leftrightarrow \quad n = 8.$$

Chú ý :

Thí sinh có thể tìm số hình chữ nhật bằng các cách khác. Nếu lí luận đúng để đi đến kết quả số hình chữ nhật là $\frac{n(n-1)}{2}$ thì cho điểm tối đa phần này.

Đề 3

Kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng năm 2002

Khối D

Câu I : (ĐH : 3 điểm; CĐ : 4 điểm)

Cho hàm số : $y = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$ (1)

(m là tham số)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1) ứng với $m = -1$.
2. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong (C) và hai trục tọa độ.
3. Tìm m để đồ thị của hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$.

Câu II : (ĐH : 2 điểm; CD : 3 điểm)

1. Giải bất phương trình : $(x^2 - 3x) \cdot \sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$

2. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \frac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$$

Câu III : (ĐH : 1 điểm; CD : 1 điểm)

Tìm x thuộc đoạn $[0; 14]$ nghiệm đúng phương trình :

$$\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0$$

Câu IV : (ĐH : 2 điểm; CD : 2 điểm)

1. Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$; $BC = 5\text{cm}$. Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng (BCD).
2. Trong không gian về hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxyz, cho mặt phẳng (P) : $2x - y + 2 = 0$ và đường thẳng :

$$d_m : \begin{cases} (2m + 1)x + (1 - m)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases}$$

Xác định m để đường thẳng d_m song song với mặt phẳng (P).

Câu V : (ĐH : 2 điểm)

1. Tìm số nguyên dương n sao cho :

$$C_n^0 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$$

2. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Đêcac vuông góc Oxy, cho elip

(E) có phương trình $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Xét điểm M chuyển động trên tia Ox và điểm N chuyển động trên tia Oy sao cho đường thẳng MN luôn tiếp xúc với (E). Xác định tọa độ của M, N để đoạn MN có độ dài nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó.

Giải

Câu 1:

1. Khi $m = -1$, ta có: $y = \frac{-3x-1}{x-1} = -3 - \frac{4}{x-1}$

- TXD: $x \neq 1$

- CBT: $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1 \Rightarrow$ hàm số không có cực trị.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = -3; \lim_{x \rightarrow 1^-} y = +\infty; \lim_{x \rightarrow 1^+} y = -\infty$$

- BBT:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y'	+		+
y	-3	$+\infty$	-3

- TC:

$x = 1$ là tiệm cận đứng vì $\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$

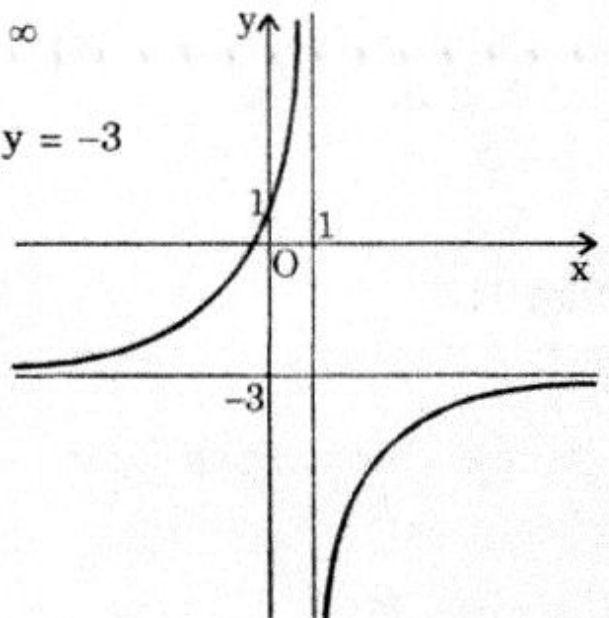
$y = -3$ là tiệm cận ngang vì $\lim_{x \rightarrow \infty} y = -3$

- Giao với các trục:

$$x = 0 \Rightarrow y = 1;$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{3}$$

- Đồ thị:



2. Diện tích cần tính là :

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{\frac{1}{3}}^0 \left(\frac{-3x-1}{x-1} \right) dx = -3 \int_{\frac{1}{3}}^0 dx - 4 \int_{\frac{1}{3}}^0 \frac{dx}{x-1} \\
 &= -3 \cdot \frac{1}{3} - 4 \ln |x-1| \Big|_{\frac{1}{3}}^0 = -1 + 4 \ln \frac{4}{3} \text{ (đvdt)}.
 \end{aligned}$$

3. Kí hiệu $f(x) = \frac{(2m-1)x - m^2}{x-1}$. Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm :

$$(H) \quad \begin{cases} f(x) = x \\ f'(x) = (x)' \end{cases}$$

$$\text{Ta có : (H)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1} = 0 \\ \left(\frac{-(x-m)^2}{x-1} \right)' = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-(x-m)^2}{x-1} = 0 \\ \frac{-2(x-m)(x-1) + (x-m)^2}{(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

Ta thấy với $\forall m \neq 1$; $x = m$ luôn thỏa mãn hệ (H). Vì vậy với $\forall m \neq 1$, (H) luôn có nghiệm, đồng thời khi $m = 1$ thì hệ (H) vô nghiệm. Do đó đồ thị hàm số (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = x$ khi và chỉ khi $m \neq 1$.

ĐS : $m \neq 1$.

Câu II :

$$1. \text{ Bất phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases}$$

$$TH\ 1. \quad \sqrt{2x^2 - 3x - 2} = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -\frac{1}{2}$$

$$TH\ 2. \quad \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \vee x > 2 \\ x \leq 0 \vee x \geq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x \geq 3$$

Từ hai trường hợp trên suy ra ĐS : $x \leq -\frac{1}{2} \vee x = 2 \vee x \geq 3$

$$2. \text{ Hệ phương trình } \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y > 0 \\ y^3 - 5y^2 + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = y > 0 \\ y = 0 \vee y = 1 \vee y = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

Câu III :

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow (\cos 3x + 3\cos x) - 4(\cos 2x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3 x - 8\cos^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2 x (\cos x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x \in [0; 14] \Leftrightarrow k = 0 \vee k = 1 \vee k = 2 \vee k = 3$$

$$\text{ĐS : } x = \frac{\pi}{2}; x = \frac{3\pi}{2}; x = \frac{5\pi}{2}; x = \frac{7\pi}{2}.$$

Câu IV :

1. Cách 1 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$.

Lại có $AD \perp$ mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.

Do đó có thể chọn hệ tọa độ Đêcac vuông góc, gốc A sao cho $B(3; 0; 0)$, $C(0; 4; 0)$; $D(0; 0; 4)$. Mặt phẳng (BCD) có phương trình :

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} - 1 = 0$$

Khoảng cách cần tính là :
$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}.$$

Cách 2 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$

Lại có $AD \perp$ mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau

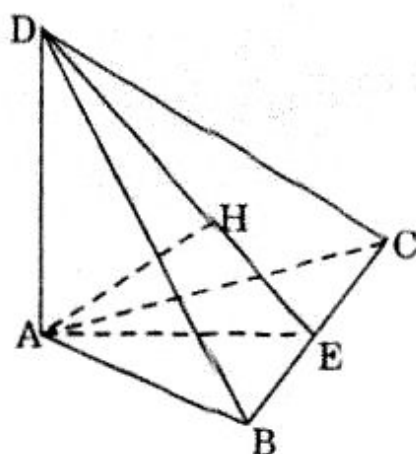
Gọi AE là đường cao của tam giác ABC; AH là đường cao của tam giác ADE thì AH chính là khoảng cách cần tính.

Dễ dàng chứng minh được hệ thức :

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$$

Thay $AC = AD = 4\text{cm}$; $AB = 3\text{cm}$ vào hệ thức trên ta tính được :

$$AH = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}$$



Cách 3 :

Từ giả thiết suy ra tam giác ABC vuông tại A, do đó $AB \perp AC$

Lại có $AD \perp$ mặt phẳng (ABC) $\Rightarrow AD \perp AB$ và $AD \perp AC$, nên AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau

Gọi V là thể tích tứ diện ABCD, ta có : $V = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot AC \cdot AD = 8$

Áp dụng công thức : $AH = \frac{3V}{dt(ABCD)}$

với $V = 8$ và $dt(\Delta BCD) = 2\sqrt{34}$ ta tính được : $AH = \frac{6\sqrt{34}}{17} \text{ (cm)}$.

2. Cách 1 :

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} (2; -1; 0)$. Đường thẳng d_m có vectơ chỉ phương $\vec{u} ((1-m)(2m+1); -(2m+1)^2; -m(1-m))$.

Suy ra : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3(2m+1)$.

d_m song song với (P) $\Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \perp \vec{n} \\ d_m \not\subset (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \\ \exists A \in d_m, A \notin (P) \end{cases}$

Ta có : điều kiện $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$

Mặt khác khi $m = -\frac{1}{2}$ thì d_m có phương trình : $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$, mọi

điểm $A(0; 1; a)$ của đường thẳng này đều không nằm trong (P), nên điều kiện $\exists A \in d_m, A \notin (P)$ được thỏa mãn.

ĐS : $m = -\frac{1}{2}$.

Cách 2 :

Viết phương trình d_m dưới dạng tham số ta được :

$$\begin{cases} x = (1 - m)(2m + 1)t \\ y = 1 - (2m + 1)^2 t \\ z = -2 - m(1 - m)t \end{cases}$$

$d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn t sau :

$$\begin{cases} x = (1 - m)(2m + 1)t \\ y = 1 - (2m + 1)^2 t \\ z = -2 - m(1 - m)t \\ 2x - y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

$\Leftrightarrow$ phương trình ẩn t sau $3(2m + 1)t + 1 = 0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Cách 3 :

$d_m // (P) \Leftrightarrow$ hệ phương trình ẩn x, y, z sau :

$$(H) \quad \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ (2m + 1)x + (1 - x)y + m - 1 = 0 \\ mx + (2m + 1)z + 4m + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{vô nghiệm}$$

Từ 2 phương trình đầu của hệ phương trình trên suy ra :

$$\begin{cases} x = \frac{m - 1}{3} \\ y = \frac{2m + 4}{3} \end{cases}$$

Thế x, y tìm được vào phương trình thứ ba ta có :

$$(2m + 1)z = -\frac{1}{3}(m^2 + 11m + 6)$$

$$\text{Hệ (H) vô nghiệm} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

Câu V :

1. Ta có :
$$(x + 1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k ,$$

Cho $x = 2$ ta được : $3^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k \Rightarrow 3^n = 243 = 3^6$

$$\Leftrightarrow n = 5.$$

2. Cách 1 :

Giả sử $M(m; 0)$ và $N(0; n)$ với $m > 0, n > 0$ là hai điểm chuyển động trên hai tia Ox và Oy .

Đường thẳng MN có phương trình : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0$

Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi :

$$16\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$$

Theo BĐT Côsi ta có :

$$MN^2 = m^2 + n^2 = (m^2 + n^2) \left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2} \right) = 25 + 16 \frac{n^2}{m^2} + 9 \frac{m^2}{n^2}$$

$$\geq 25 + 2\sqrt{16 \cdot 9} = 49 \Rightarrow MN \geq 7$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{16n^2}{m^2} = \frac{9m^2}{n^2} \\ m^2 + n^2 = 49 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2\sqrt{7}, n = \sqrt{21}$$

Kết luận : Với $M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21})$ thì MN đạt GTNN và $GTNN(MN) = 7$.

Cách 2 :

Giả sử $M(m; 0)$ và $N(0; n)$ với $m > 0$ là hai điểm chuyển động trên hai tia Ox và Oy .

Đường thẳng MN có phương trình : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} - 1 = 0$

Đường thẳng này tiếp xúc với (E) khi và chỉ khi :

$$16\left(\frac{1}{m}\right)^2 + 9\left(\frac{1}{n}\right)^2 = 1$$

Theo bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có :

$$MN^2 = m^2 + n^2 = (m^2 + n^2)\left(\frac{16}{m^2} + \frac{9}{n^2}\right) \geq \left(m \cdot \frac{4}{m} + n \cdot \frac{3}{n}\right)^2 = 49$$

$$\Rightarrow MN \geq 7$$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} m : \frac{4}{m} = n : \frac{3}{n} \\ m^2 + n^2 = 7 \\ m > 0, n > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2\sqrt{7}, n = \sqrt{21}$$

Kết luận : Với $M(2\sqrt{7}; 0)$, $N(0; \sqrt{21})$ thì MN đạt GTNN và $GTNN(MN) = 7$.

Cách 3 :

$$\text{Giả sử ta có } A(x_0, y_0) \in (E) \Rightarrow \frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9} = 1$$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(x_0, y_0)$ thuộc (E) :

$$\frac{xx_0}{16} + \frac{yy_0}{9} = 1$$

Suy ra tọa độ của M và N là $M\left(\frac{16}{x_0}; 0\right)$ và $N\left(0; \frac{9}{y_0}\right)$

$$\Rightarrow MN^2 = \frac{16^2}{x_0^2} + \frac{9^2}{y_0^2} = \left(\frac{x_0^2}{16} + \frac{y_0^2}{9}\right)\left(\frac{16^2}{x_0^2} + \frac{9^2}{y_0^2}\right)$$

Sử dụng bất đẳng thức Côsi hoặc Bunhiacốpski (như cách 1 hoặc cách 2) ta có : $MN^2 \geq 7^2$

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow x_0 = \frac{8\sqrt{7}}{7}; y_0 = \frac{3\sqrt{21}}{7}$$

Khi đó : $M(2\sqrt{7}; 0), N(0; \sqrt{21})$ và $GTNN(MN) = 7$.

Đề 4

Câu I:

Cho hàm số :

$$f(x) = x^3 - 2x - (m - 1)x + m$$

1. Tìm m để đồ thị $y = f(x)$ tiếp xúc với trục hoành Ox
2. Tìm m để $f(x) \geq \frac{1}{x}$ với $\forall x \geq 2$.

Câu II:

Cho phương trình :

$$4k(\sin^6 x + \cos^6 x - 1) = 3\sin 6x$$

1. Giải phương trình khi $k = 4$
2. Biện luận theo k số nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ của phương trình trên.

Câu III:

Cho tam giác ABC có các cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$. Gọi m_b, m_c lần lượt là độ dài của các trung tuyến BM, CN .

1. Viết $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$, chứng minh rằng $2\cot A = \cot B + \cot C$
2. Viết $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$ và $\hat{A} = 60^\circ$, chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều.

Câu IV :

1. Giải phương trình : $3^x - 4 = 5^{\frac{x}{2}}$
2. Tìm a sao cho hệ bất phương trình sau đây có nghiệm :

$$\begin{cases} 3^x - 4 \geq 5^{\frac{x}{2}} \\ 1 + \log_2(a - x) \geq \log_2(x^4 + 1) \end{cases}$$

Câu V :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn xOy cho elip :

$$(E) : x^2 + 4y^2 = 4$$

và hai điểm M(-2, m), N(2, n) với m, n > 0.

1. Gọi A₁, A₂ là các đỉnh trên trục lớn của (E), trong đó A₂ có hoành độ không âm.

Hãy viết phương trình các đường thẳng A₁N, A₂M và xác định tọa độ giao điểm I của chúng.

2. Cho MN thay đổi sao cho nó luôn tiếp xúc (E). Tìm quỹ tích của I.

Câu VI :

Cho tam giác đều OAB có cạnh bằng a > 0. Trên đường thẳng d đi qua O và vuông góc với mặt phẳng (OAB) lấy điểm M với OM = x. Gọi E, F lần lượt là các hình chiếu vuông góc của A lên ME, OB. Đường thẳng EF cắt d tại N.

1. Chứng minh rằng AN ⊥ BM
2. Xác định x để thể tích tứ diện ABMN là nhỏ nhất.

Giải**Câu I :**

Cho hàm số : $f(x) = x^3 - 2x^2 - (m - 1)x + m$ (C_m)

1. Tìm m để đồ thị y = f(x) tiếp xúc với trục hoành Ox

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$x^3 - 2x^2 - (m - 1)x + m = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - x - m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - x - m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(C_m) tiếp xúc với $Ox \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{Hoặc (2) có nghiệm } x = 1 \\ \text{Hoặc (2) có nghiệm kép} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 1 - m = 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

2. Tìm m để $f(x) \geq \frac{1}{x}$ với $\forall x \geq 2$

$$\text{Ta có: } f(x) \geq \frac{1}{x} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - (m - 1)x + m \geq \frac{1}{x} \quad (x \geq 2)$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + x^2 - 1 \geq m(x^2 - x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 - 2x^3 + x^2 - 1}{x^2 - x} \geq m$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2 - x)^2 - 1}{x^2 - x} \geq m$$

$$\text{Đặt: } t = x^2 - x$$

$$\text{Ta có: } x \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 2$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{t^2 - 1}{t} \geq m \quad (t \geq 2)$$

$$\text{Đặt: } g(t) = \frac{t^2 - 1}{t}$$

Ta có : $g'(t) = \frac{t^2 + 1}{t^2} > 0$

t	2	$+\infty$
$g'(t)$		+
$g(t)$	$\frac{3}{2}$	$\nearrow +\infty$

Vậy ta phải có : $m \geq \frac{3}{2}$.

Câu II :

Cho phương trình :

$$4k(\sin^6 x + \cos^6 x - 1) = 3\sin 6x \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi $k = -4$

Ta có : $-16(\sin^6 x + \cos^6 x - 1) = 3\sin 6x$

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2 x) [1 \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x] \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x \\ &= 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \end{aligned}$$

$$(1) \Leftrightarrow -16 \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x - 1 \right) = 3(3\sin 2x - 4\sin^3 2x)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 2x + 4\sin^2 2x - 3\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x [4\sin^2 2x + 4\sin 2x - 3] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 0 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -\frac{3}{2} \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = k' \pi \\ 2x = \frac{\pi}{6} + k'2\pi \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + k'2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k' \pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{12} + k' \pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k' \pi \end{cases} \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

2. Biện luận theo k số nghiệm $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ của phương trình trên.

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 4k \left(1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x - 1\right) = 3(3\sin 2x - 4\sin^3 2x)$$

$$\Leftrightarrow -k \sin^2 2x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x$$

Đặt : $t = \sin 2x$.

$$\text{Ta có : } -\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -1 \leq t \leq 1$$

$$(1) \Leftrightarrow 4t^3 - kt^2 - 3t = 0 \Leftrightarrow t(4t^2 - kt - 3) = 0 \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ 4t^2 - kt - 3 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \frac{4t^2 - 3}{t} = k.$$

$$\text{Đặt : } h(t) = \frac{4t^2 - 3}{t} \quad \begin{cases} -1 \leq t \leq 1 \\ t \neq 0 \end{cases}$$

$$h'(t) = \frac{4t^2 + 3}{t^2} > 0$$

Bảng biến thiên :

t	-1	0	1
$h'(t)$	+		+
$h(t)$	-1 ↗	$+\infty$ $-\infty$	↗ 1

Theo bảng biến thiên ta có :

$1 < k < +\infty$: phương trình có 2 nghiệm

$-1 < k < 1$: phương trình có 2 nghiệm

$k = 1$: phương trình có 3 nghiệm

$k = -1$: phương trình có 3 nghiệm

$-\infty < k < -1$: phương trình có 2 nghiệm

Câu III :

1. Biết : $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$ (1)

Chứng minh rằng :

$$2\cotg A = \cotg B + \cotg C \quad (2)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} (2) & \Leftrightarrow 2 \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B \cdot \sin C} \\ & \Leftrightarrow \sin^2 A = 2 \cos A \cdot \sin B \cdot \sin C \\ & \Leftrightarrow a^2 = \frac{2(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc} \cdot bc \\ & \Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2 \quad (3) \end{aligned}$$

Ta lại có : $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{m_b^2}{m_c^2}$

$$\begin{aligned} & \Leftrightarrow \frac{c^2}{b^2} = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{2a^2 + 2b^2 - c^2} \\ & \Leftrightarrow 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 - b^4 \\ & \Leftrightarrow (b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 - c^2) = 0 \\ & \Leftrightarrow 2a^2 = b^2 + c^2 \quad (\text{vì } b \neq c) \quad (4) \end{aligned}$$

Vậy nếu (1) đúng thì (2) đúng.

2. Biết : $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c}$ và $\hat{A} = 60^\circ$

Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác đều

Theo chứng minh trên ta có :

$$\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \Leftrightarrow (b^2 - c^2)(2a^2 - b^2 - c^2) = 0$$

TH 1 : $b = c$

Ta có ΔABC là tam giác đều

TH 2 : $2a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 2\cotg A = \cotg B + \cotg C$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 2\cos A \cdot \sin B \cdot \sin C$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} [\cos(B - C) - \cos(B + C)]$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left[\cos(B - C) + \frac{1}{2} \right] \Rightarrow \cos(B - C) = 1$$

$$\Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow B = C \Rightarrow \text{tam giác ABC đều.}$$

Vậy : trong cả hai trường hợp ta đều có tam giác ABC đều.

Câu IV :

1. Giải phương trình : $3^x - 4 = 5^{\frac{x}{2}}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 3^x = 4 + (\sqrt{5})^x \Leftrightarrow 1 = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$$

$$\Leftrightarrow 1 = f(x)$$

Do $f(x) = 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^x$ là hàm số giảm nên (1) có nghiệm

duy nhất. Ta lại có $f(2) = 1$

Vậy nghiệm của (1) là $x = 2$.

2. Tìm a sao cho hệ bất phương trình sau đây có nghiệm :

$$\begin{cases} 3^x - 4 \geq 5^{\frac{x}{2}} & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 + \log_2(a - x) \geq \log_2(x^4 + 1) & (3) \end{cases}$$

Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow 1 \geq f(x) \Leftrightarrow f(2) \geq f(x) \Leftrightarrow x \geq 2 \text{ (vì nghịch biến)}$$

$$(3) \Leftrightarrow \log_2(a - x) \geq \log_2(x^4 + 1) \Leftrightarrow 2(a - x) \geq x^4 + 1$$

$$\Leftrightarrow a \geq \frac{1}{2}[x^4 + 2x + 1] \Leftrightarrow a \geq g(x)$$

$$\text{Với : } g(x) = \frac{1}{2}[x^4 + 2x + 1] \quad (x \geq 2)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}[4x^3 + 2]$$

Ta có bảng biến thiên của g(x) :

x	2	$+\infty$
g'		+
g	$\frac{21}{2}$	$+\infty$

Để hệ bất phương trình có nghiệm ta phải có : $a \geq \frac{21}{2}$.

Câu V :

1. N(2, n)

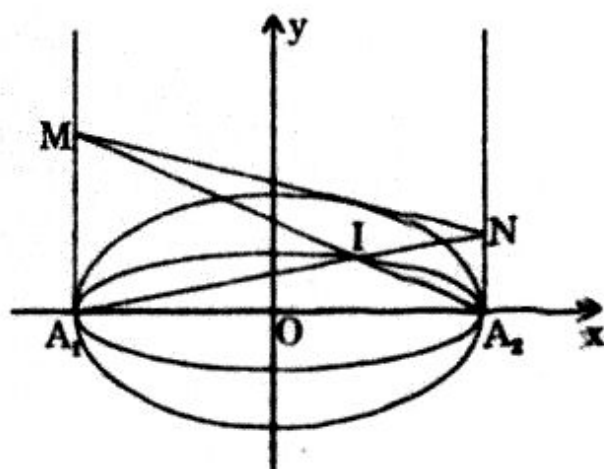
$A_1(-2; 0)$

Phương trình A_1N :

$$nx - 4y + 2n = 0$$

$M(-2, m)$

$A_2(2; 0)$



Phương trình $A_2M : mx + 4y - 2m = 0$

Tọa độ giao điểm $I(x, y)$ của A_1N và A_2M là nghiệm của hệ phương trình :

$$(I) \quad \begin{cases} nx - 4y + 2n = 0 \\ mx + 4y - 2m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2(m-n)}{m+n} \\ y = \frac{m \cdot n}{m+n} \end{cases}$$

2. Ta có :

$$(E) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

$$MN : (m-n)x + 4y - 2(m+n) = 0$$

$$\begin{aligned} MN \text{ tiếp xúc với } (E) &\Leftrightarrow A^2a^2 + B^2b^2 = C^2 \\ &\Leftrightarrow 4(m-n)^2 + 16 = 4(m+n)^2 \\ &\Leftrightarrow m \cdot n = 1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} n = \frac{4y}{x+2} \\ m = \frac{4y}{2-x} \end{cases}$$

Thay vào (1) ta được :

$$\begin{aligned} \frac{16y^2}{4-x^2} = 1 &\Leftrightarrow x^2 + 16y^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \end{aligned} \quad (E')$$

Vậy quỹ tích của I là một phần của elip (E) có phương trình

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1 \text{ thỏa điều kiện giới hạn } y = 0.$$

Câu VI :

1. Chứng minh rằng $AN \perp BM$

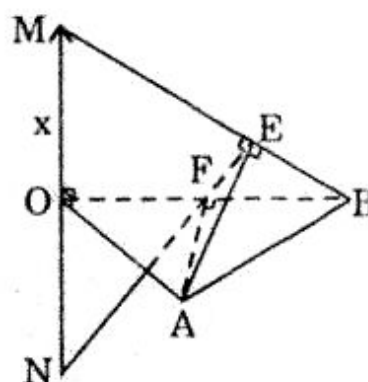
Ta có : $OB \perp AF$

$$\Rightarrow MB \perp OF$$

Ta lại có : $MB \perp AE$

$$\Rightarrow \text{MP} \perp (\text{AEF})$$

$$\Rightarrow MB \perp AN$$



- 2. Ta có 2 tam giác $\triangle NOF$ và $\triangle BOM$ đồng dạng.**

$$\Rightarrow \frac{NO}{BO} = \frac{OF}{OM} \Rightarrow ON \cdot OM = OF \cdot OB = \frac{a^2}{2}$$

Ta có: $V = V_{ABMN} = \frac{1}{3}h$

$$V = \frac{1}{3} \cdot AF \cdot \frac{1}{2} \cdot OB(OM + ON)$$

V nhỏ nhất $\Leftrightarrow OM + ON$ nhỏ nhất

$$\Leftrightarrow OM = ON = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Đề 5

Câu 1 :

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}{x + 2 \sin \alpha}$

1. Xác định tiệm cận xiên và tâm đối xứng của đồ thị.
2. Tìm α để hàm số có điểm cực đại và cực tiểu.
3. Tìm α kể từ gốc tọa độ có thể kẻ đến đồ thị 2 tiếp tuyến phân biệt. Khi đó gọi $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ là tọa độ các tiếp điểm, chứng tỏ rằng : $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$

Câu II :

1. Giải hệ :

$$\begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2 \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3 \end{cases}$$

2. Giả sử (x, y) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để tích số xy nhỏ nhất.

Câu III :

1. Giải phương trình :

$$\frac{\cos x(2 \sin x + 3\sqrt{2}) - 2 \cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$$

2. Trong tam giác ABC, biết $\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{3}$, chứng tỏ $c = \frac{1}{2}(a + b)$.

Trong đó a, b, c là độ dài ba cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC.

Câu IV :

Trong không gian cho đường thẳng $(\Delta_1), (\Delta_2)$ có phương trình :

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases} \quad (\Delta_2) : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

- Viết phương trình các mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau và lần lượt đi qua (Δ_1) và (Δ_2)
- Tìm khoảng cách giữa $(\Delta_1), (\Delta_2)$.
- Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với trục Oz và cắt cả hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) .

Câu V :

Cho một tam diện vuông đỉnh O. Trên 3 cạnh của tam diện lấy 3 điểm A, B, C sao cho :

$$AC = 2.OB ; \quad BC = 2.OA$$

1. M, N là chân các đường vuông góc kẻ từ AC và BC. Chứng minh rằng MN vuông góc với OC.
2. Tính $\cos(\widehat{MON})$.
3. Gọi D là điểm giữa của đoạn AB. Chứng minh :

$$\frac{\operatorname{tg}^4(\widehat{OCD})}{\operatorname{tg}^4(\widehat{OCA})} + \frac{MN}{AB} = 1$$

Giải

Câu 1 :

$$y = f(x) = \frac{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}{x + 2 \sin \alpha}$$

1. Xác định tiệm cận xiên và tâm đối xứng của đồ thị.

Chia đa thức ta được :

$$y = x + 2(\cos \alpha - \sin \alpha) + \frac{1 - 4 \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)}{x + 2 \sin \alpha}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - 4 \sin \alpha (\cos \alpha - \sin \alpha)}{x + 2 \sin \alpha} = 0$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên là :

$$y = x + 2(\cos \alpha - \sin \alpha)$$

Ta có : $\lim_{x \rightarrow -2 \sin \alpha} y = \infty \Rightarrow$ tiệm cận đứng là $x = -2 \sin \alpha$

Tâm đối xứng $I(x_1, y_1)$ là giao điểm của 2 tiệm cận nên ta có :

$$\begin{cases} x_1 = -2 \sin \alpha \\ y_1 = -2 \sin \alpha + 2(\cos \alpha - \sin \alpha) = 2 \cos \alpha - 4 \sin \alpha \end{cases}$$

2. Tìm α để hàm số có cực đại và cực tiểu.

$$\text{Ta có : } f(x) = \frac{x^2 + 4x \sin \alpha + 4 \sin \alpha \cos \alpha - 1}{(x + 2 \sin \alpha)^2}$$

Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha.\cos\alpha + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin\alpha - \cos\alpha)^2 + \sin^2\alpha > 0 \quad (1)$$

(1) đúng $\forall \alpha$. Vậy với mọi α hàm số luôn có cực đại và cực tiểu.

3. Tìm α để từ gốc tọa độ có thể kẻ đến đồ thị 2 tiếp tuyến phân biệt.

Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến qua O ta có phương trình tiếp tuyến là : $(\Delta) : y = kx$

Phương trình hoành độ giao điểm của (Δ) và (C) :

$$\frac{x^2 + 2x \cos \alpha + 1}{x + 2 \sin \alpha} = kx$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x \cos \alpha + 1 = kx^2 + 2kx \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow (1 - k)x^2 + 2(\cos \alpha - k \sin \alpha)x + 1 = 0$$

Điều kiện $k \neq 1$ và $\Delta' = 0$

$$\Delta' = 0 \Leftrightarrow (\cos \alpha - k \sin \alpha)^2 - (1 - k) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 \sin^2 \alpha + (1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha)k + \cos^2 \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 \sin^2 \alpha + (1 - \sin 2\alpha)k - \sin^2 \alpha = 0$$

Để từ gốc tọa độ có thể kẻ đến đồ thị 2 tiếp tuyến phân biệt, ta phải có (1) có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \sin \alpha \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Gọi $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ là 2 tiếp điểm, ta có :

$$y_1 = k_1 x_1 \quad ; \quad y_2 = k_2 x_2$$

Do k_1 và k_2 là nghiệm của (1) nên ta có :

$$k_1 k_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\sin^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = -1$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } x_1 x_2 + y_1 y_2 &= x_1 x_2 + k_1 x_1 \cdot k_2 x_2 = x_1 x_2 (1 + k_1 k_2) \\ &= x_1 x_2 (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

Câu II :

$$1. \text{ Giải hệ : } \begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \leq 2 & (1) \\ x + 3y \geq 2 - \log_4 3 & (2) \end{cases}$$

Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow x + 3y - 2 \geq -\log_4 3 = \log_4 \frac{1}{3}$$

$$\begin{aligned} \text{Theo BĐT Côsi : } 2 &\geq 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} \geq \sqrt{3 \cdot 4^{x+3y-2}} \\ &\geq 2 \sqrt{3 \cdot 4^{\log_4 \frac{1}{3}}} = 2 \sqrt{3 \cdot \frac{1}{3}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy từ (1)} &\Rightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} + 3 \cdot 4^{2y-1} = 2 \\ 4^{x+y-1} = 3 \cdot 4^{2y-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} = 1 \\ 3 \cdot 4^{2y-1} = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} = 1 \\ 4^{2y-1} = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x+y-1} = 4^0 \\ 4^{2y-1} = 4^{\log_4 \frac{1}{3}} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2y - 1 = \log_4 \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_4 3 \\ y = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_4 3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$2. \begin{cases} x + y = 2a - 1 \\ x^2 + y^2 = a^2 + 2a - 3 \end{cases}$$

Xác định a để xy nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } xy &= \frac{1}{2} [(x+y)^2 - (x^2 + y^2)] \\ &= \frac{1}{2} [(2a-1)^2 - (a^2 + 2a - 3)] \\ &= \frac{3}{2} a^2 - 3a + 2 \end{aligned}$$

Ta có :
$$\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$$

Vậy : x, y là 2 nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0$$

Để tồn tại x, y ta phải có :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow S^2 - 4P \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (2a - 1)^2 - 4\left(\frac{3}{2}a^2 - 3a + 2\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -2a^2 + 8a - 7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Đặt : $P = f(a) = \frac{3}{2}a^2 - 3a + 2$

$$f'(a) = 3a - 3 \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1 < 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

a	$2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$	$2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
f'	+	
f	min	max

Vậy : để xy nhỏ nhất ta phải có $a = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu III :

1. Giải phương trình :

$$\frac{\cos x(2 \sin x + 3\sqrt{2}) - 2 \cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1 \quad (1)$$

Điều kiện : $1 + \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq -1$

$$\Leftrightarrow 2x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x + 3\sqrt{2}\cos x - 2\cos^2 x - 1 = 1 + \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0 \quad (2)$$

Đặt : $t = \cos x$

Ta có : $-1 \leq t \leq 1$

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2 - 3\sqrt{2}t + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \text{ (loại)} \\ t = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\text{Ta được : } \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \text{ (loại)} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm : $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$

2. Trong tam giác ABC cho :

$$\operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

$$\text{Chứng tỏ : } c = \frac{1}{2}(a + b) \quad (2)$$

Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow 2\sin C = \sin A + \sin B$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(A + B) = 2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = 3 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad (1)$$

Vậy (1) đúng, suy ra (2) đúng.

Câu IV :

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 10 = 0 \end{cases}$$

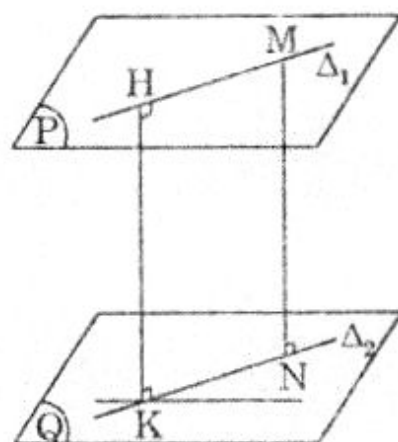
$$(\Delta_2) : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Phương trình tham số của Δ_1

$$\begin{cases} x = -23 + 8t \\ y = -10 + 4t \\ z = t \end{cases}$$

Phương trình tham số của Δ_2 .

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = t \end{cases}$$



Ta có : $\vec{a}_{\Delta_1} = (8; 4; 1)$

$$\vec{a}_{\Delta_2} = (2; -2; 1)$$

$\Rightarrow$ Vectơ pháp tuyến của (P) và (Q) là :

$$\vec{n}_P = \vec{n}_Q = (6; -6; -24) = 6(1, -1, -4)$$

Phương trình của (P) có dạng : $x - y - 4z + D = 0$

$$M(-23; -10; 0) \in (P)$$

$$\Rightarrow -23 + 10 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 13$$

$$\Rightarrow (P) : x - y - 4z + 13 = 0$$

Phương trình của (Q) có dạng : $x - y - 4z + D' = 0$

$$N(3; -2; 0) \in (Q)$$

$$\Rightarrow 3 + 2 + D' = 0 \Rightarrow D' = -5$$

$$\Rightarrow (Q) : x - y - 4z - 5 = 0$$

2. Tính khoảng cách giữa Δ_1 và Δ_2 .

$$d(\Delta_1, \Delta_2) = d(M, Q) = \frac{|-23 + 10 - 5|}{\sqrt{1 + 1 + 16}} = \frac{18}{\sqrt{18}} = 3\sqrt{2}$$

3. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với trục Oz và cắt cả hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

Gọi (α) là mặt phẳng chứa Δ_1 và song song với Oz, ta có :

$$\vec{a}_{\Delta_1} = (8; 4; 1)$$

$$\vec{e}_3 = (0; 0; 1)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (4; -8; 0)$$

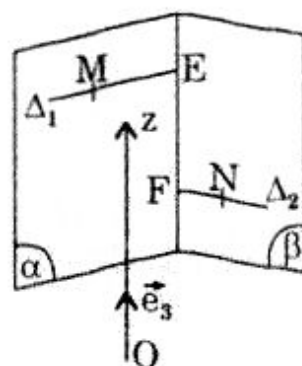
$$\vec{n}'_\alpha = (1; -2; 0)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : x - 2y + D = 0$$

$$M(-23, -10, 0) \in (\alpha)$$

$$\Rightarrow -23 + 20 + D = 0 \Rightarrow D = 3$$

$$\Rightarrow (\alpha) : x - 2y + 3 = 0$$



Gọi β là mặt phẳng chứa Δ_2 và song song với Oz, ta có :

$$\vec{a}_{\Delta_2} = (2; -2; 1)$$

$$\vec{e}_3 = (0; 0; 1) \Rightarrow \vec{n}_\beta = (-2; -2; 0)$$

$$\vec{n}'_\beta = (1; 1; 0) \Rightarrow (\beta) : x + y + D = 0$$

$$N(3, -2, 0) \in (\beta) \Rightarrow 3 - 2 + D = 0$$

$$\Rightarrow D = -1$$

$$\Rightarrow (\beta): x + y - 1 = 0$$

$$\text{Ta có: } (\alpha) \cap (\beta) = \Delta$$

$$\text{Vậy phương trình của } \Delta \text{ là: } (\Delta): \begin{cases} x - 2 + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Câu V:

1. Đặt $OA = a$, $OB = b$, ta có:

$$OC^2 = CA^2 - OA^2 = 4b^2 - a^2$$

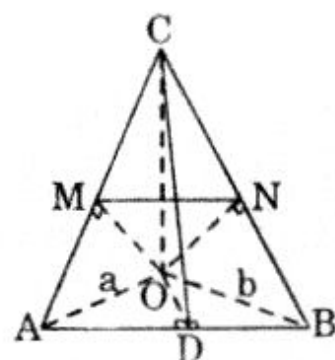
$$OC^2 = CB^2 - OB^2 = 4a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 4b^2 - a^2 = 4a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 5b^2 = 5a^2 \Rightarrow a = b$$

$$\Rightarrow CA = CB \Rightarrow CM = CN$$

$$\Rightarrow MN \parallel AB$$



Ta có: $OC \perp OA$ và $OC \perp OB$

$$\Rightarrow OC \perp mp(OAB) \Rightarrow OC \perp AB \Rightarrow OC \perp MN$$

2. Ta có: $OA = OB = a$, $CA = CB = 2a$

$$AB = a\sqrt{2}, \quad OC = a\sqrt{3}$$

$$\frac{MN}{AB} = \frac{CM}{CA} = \frac{CO^2}{CA^2} = \frac{3}{4} \Rightarrow MN = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$$

$$OM = ON = \frac{OA \cdot OC}{AC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } MN^2 = OM^2 + ON^2 - 2OM \cdot ON \cdot \cos \widehat{MON}$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{MON} = \frac{OM^2 + ON^2 - MN^2}{2OM \cdot ON}$$

$$= \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - \frac{18a^2}{16}}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{9}{8}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{4}$$

$$\cos \widehat{MON} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Ta có : } \frac{\operatorname{tg}^4 \widehat{OCD}}{\operatorname{tg}^4 \widehat{OCA}} + \frac{MN}{AB} &= \frac{\left(\frac{OD}{OC}\right)^4}{\left(\frac{OA}{OC}\right)^4} + \frac{MN}{AB} \\ &= \left(\frac{OD}{OA}\right)^4 + \frac{MN}{AB} \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 + \frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1. \end{aligned}$$

Đề 6

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2}$

1. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị của hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m .
2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = m$
3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$

Câu II :

1. Giải bất phương trình : $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$
2. Giải và biện luận phương trình : $\sqrt{x^2 - x} = a - x$ (a là tham số).
3. Cho các số x, y thỏa mãn các điều kiện $x \geq 0$; $y \geq 0$ và $x^3 + y^3 = 2$. Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 \leq 2$.

Câu III :

1. Giải phương trình : $\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x$

2. Các góc của ΔABC thỏa mãn điều kiện :

$$\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} + \sqrt{\operatorname{tg} C} = \sqrt{\cot g \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot g \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot g \frac{C}{2}}$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Câu IV :

1. Tính tích phân : $I = \int_1^e x \ln^2 x \cdot dx$

2. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng (D) :

$$(D) : Ax + By + C = 0 \quad (A^2 + B^2 > 0)$$

tiếp xúc với elip (E).

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{là} \quad C^2 = a^2 \cdot A^2 + b^2 \cdot B^2$$

Câu V :

Cho trên mặt phẳng (α) góc vuông xOy , đoạn SO vuông góc với mặt phẳng (α) . Các điểm M, N chuyển động trên Ox, Oy sao cho ta luôn có : $OM + ON = a$

1. Xác định giá trị lớn nhất của thể tích tứ diện $SOMN$.
2. Tìm quỹ tích tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$.
Chứng minh rằng khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó lại có bán kính mặt cầu ngoại tiếp nhỏ nhất.

Giải**Câu I :**

Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x + 2} \quad (C_m)$

1. Chứng minh rằng tiệm cận xiên của đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua một điểm cố định với mọi m .

Ta có : $y = mx + m + \frac{1}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (y - (mx + m)) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x+2} = 0$$

Vậy đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là :

$$(\Delta_m) : y = mx + m$$

Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cố định, ta có : $M_0 \in \Delta_m$ với $\forall m$

$$\Leftrightarrow y_0 = mx_0 + m \quad \text{với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + 1) - y_0 = 0 \quad \text{với } \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy (Δ_m) luôn đi qua điểm $M_0(-1; 0)$ với mọi m .

2. Với giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = m$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = m$.

$$\frac{mx^2 + 3mx + 2m + 1}{x+2} = m \quad (x \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 3mx + 2m + 1 = mx + 2m$$

$$\Leftrightarrow mx^2 + 2mx + 1 = 0 \quad (1)$$

(C_m) tiếp xúc với $y = m \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = 0 \\ 4m^2 - 4m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 - m = 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy để (C_m) tiếp xúc với $y = m$ ta phải có $m = 1$.

3. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -1$.

$$\begin{aligned} \text{Với } m = -1 \Rightarrow y = f(x) &= \frac{-x^2 - 3x - 1}{x + 2} \\ &= -x - 1 + \frac{1}{x + 2} \end{aligned}$$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 4x - 5}{(x + 2)^2}$$

$$\Delta' = 4 - 5 = -1 < 0 \Rightarrow f'(x) < 0, \quad \forall x \in D$$

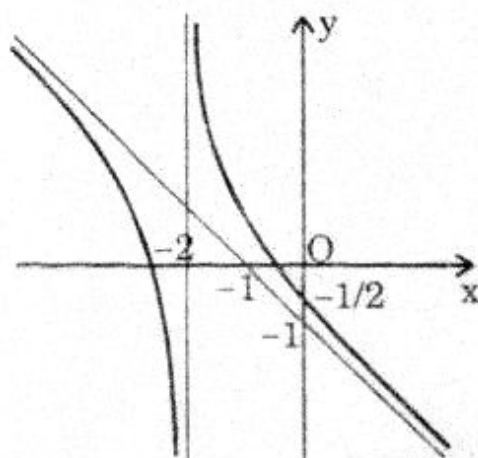
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
f'			
f	$+\infty$		$+\infty$
	$\nearrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \infty \Rightarrow \text{tiệm cận đứng } x = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (-x - 1)] = 0 \Rightarrow \text{tiệm cận xiên } y = -x - 1$$

Đồ thị :



Câu II :

1. Giải bất phương trình : $2^x < 3^{\frac{x}{2}} + 1$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 1 < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Đặt : $f(x) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x$

Ta có $f(x)$ là hàm số giảm, lại có : $f(2) = 1$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow f(2) < f(x) \Leftrightarrow x < 2$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x < 2$.

2. Giải và biện luận phương trình : $\sqrt{x^2 - x} = a - x$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} a - x \geq 0 \\ x^2 - x = (a - x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq a \\ x(2a - 1) = a^2 \end{cases}$$

TH 1 : $a = \frac{1}{2}$.

Phương trình vô nghiệm.

TH 2 : $a \neq \frac{1}{2}$

Ta có : $x_0 = \frac{a^2}{2a - 1}$; x_0 nhận được.

$$\Leftrightarrow \frac{a^2}{2a - 1} \leq a \Leftrightarrow \frac{-a^2 + a}{2a - 1} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq a \leq \frac{1}{2} \vee a \geq 1$$

Ta có bảng biện luận sau :

a	Nghiệm của phương trình
$+\infty$	x_0
1	$x_0 = 1$
	VN
$\frac{1}{2}$	VN
	x_0
0	$x_0 = 0$
$-\infty$	VN

3. Cho các số x, y thỏa : $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x^3 + y^3 = 2 \end{cases}$

Chứng minh rằng : $x^2 + y^2 \leq 2$

Đặt : $f(x) = x^2 + y^2 = x^2 + (2 - x^3)^{\frac{2}{3}}$

Với : $0 \leq x \leq \sqrt[3]{2}$

Ta có : $f'(x) = 2x - 2x^2(2 - x^3)^{\frac{1}{3}}$

$$f'(x) = \frac{2x|\sqrt[3]{2 - x^3} - x|}{\sqrt[3]{2 - x^3}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1$$

$$f(0) = 2^{\frac{2}{3}} < 2$$

$$f(1) = 2 \leq 2$$

$$f(\sqrt[3]{2}) < 2$$

Vậy : $f(x) \leq 2$

Câu III :

1. Giải phương trình :

$$\sin^8 x + \cos^8 x = \frac{17}{16} \cos^2 2x \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \sin^8 x + \cos^8 x &= (\sin^4 x + \cos^4 x)^2 - 2\sin^4 x \cos^4 x \\ &= \left(1 - \frac{\sin^2 2x}{2}\right)^2 - \frac{2}{16} \sin^4 2x \end{aligned}$$

$$\text{Đặt : } t = \sin^2 2x \quad (0 \leq t \leq 1)$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \left(1 - \frac{t}{2}\right)^2 - 2 \frac{t^2}{16} = \frac{17}{16} (1 - t)$$

$$\Leftrightarrow 4(2 - t)^2 - 2t^2 = 17(1 - t)$$

$$\Leftrightarrow 2t^2 + t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \text{ (loại)} \\ t = \frac{1}{2} \text{ (nhận)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \cos^4 x = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Các góc của tam giác ABC thỏa mãn điều kiện.

$$\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} + \sqrt{\operatorname{tg} C} = \sqrt{\cot g \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot g \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot g \frac{C}{2}}$$

Chứng minh rằng ΔABC đều.

Ta thấy đề bài toán có nghĩa thì ΔABC phải là tam giác nhọn.

Trước hết ta chứng minh bất đẳng thức sau :

$$\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \quad (2)$$

Ta có : $\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B}$

Ta chỉ cần chứng minh :

$$2\sqrt{\operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B} \geq 2\sqrt{\operatorname{tg} \frac{A+B}{2}} \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \operatorname{tg} A \cdot \operatorname{tg} B \geq \cot^2 \frac{C}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin A \cdot \sin B}{\cos A \cdot \cos B} \geq \frac{1 + \cos C}{1 - \cos C}$$

$$\Leftrightarrow \sin A \cdot \sin B (1 - \cos C) \geq \cos A \cdot \cos B (1 + \cos C)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq \cos(A+B) + \cos C \cdot \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\cos C + \cos C \cdot \cos(A-B)$$

$$\Leftrightarrow 0 \geq -\cos C [1 - \cos(A-B)] \quad (4)$$

(4) đúng $\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Ta thấy dấu bằng của (2) chỉ xảy ra khi $A = B$

Áp dụng (2) ta có :

$$\sqrt{\operatorname{tg} A} + \sqrt{\operatorname{tg} B} + \sqrt{\operatorname{tg} C} = \sqrt{\cot g \frac{A}{2}} + \sqrt{\cot g \frac{B}{2}} + \sqrt{\cot g \frac{C}{2}}$$

$$\text{Vậy : (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ B = C \\ C = A \end{cases} \Leftrightarrow A = B = C$$

$\Leftrightarrow \Delta ABC$ là tam giác đều.

Câu IV :

$$1. \text{ Tính tích phân : } I = \int_1^e x \cdot \ln^2 x \cdot dx$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần ta có :

$$\text{Đặt : } u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2 \ln x}{x} dx$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \left[\frac{x^2}{2} \ln^2 x \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \ln x \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{e^2}{2} - J$$

$$\text{Với : } J = \int_1^e x \cdot \ln x \cdot dx$$

Tiếp tục dùng phương pháp tích phân ta có :

$$\text{Đặt } u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$$

$$J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2} dx$$

$$\Leftrightarrow J = \left[\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} \right]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow J = \frac{e^2 + 1}{4}$$

$$\Rightarrow I = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2 + 1}{4} = \frac{e^2 - 1}{4}$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{e^2 - 1}{4}.$$

$$2. \quad (D) : Ax + By + C = 0$$

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

TH 1 : $B \neq 0$

$$(D) : y = \frac{-(Ax + C)}{B}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (E) :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(Ax + C)^2}{b^2 B^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow b^2 B^2 x^2 + a^2 (Ax + C)^2 = a^2 b^2 B^2$$

$$\Leftrightarrow (a^2 A^2 + b^2 B^2)x^2 + 2ACa^2 x + a^2 C^2 - a^2 b^2 B^2 = 0 \quad (1)$$

(D) tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow \Delta' = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 C^2 a^4 - (a^2 A^2 + b^2 B^2)(a^2 C^2 - a^2 b^2 B^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow A^2 C^2 a^4 - A^2 C^2 a^4 + a^4 A^2 b^2 B^2 - b^2 B^2 a^2 C^2 + b^4 B^4 a^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 b^2 B^2 [a^2 A^2 + b^2 B^2 - C^2] = 0 \Leftrightarrow a^2 A^2 + b^2 B^2 = C^2$$

TH 2 : $B = 0 \Rightarrow A \neq 0$

$$(D) : x = -\frac{C}{A}$$

$$(D) \text{ tiếp xúc với } (E) \Leftrightarrow -\frac{C}{A} = \pm a \Leftrightarrow A^2 a^2 = C^2$$

$$\Leftrightarrow A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2 \quad (\text{vì } B = 0)$$

Vậy trong mọi trường hợp ta đều có :

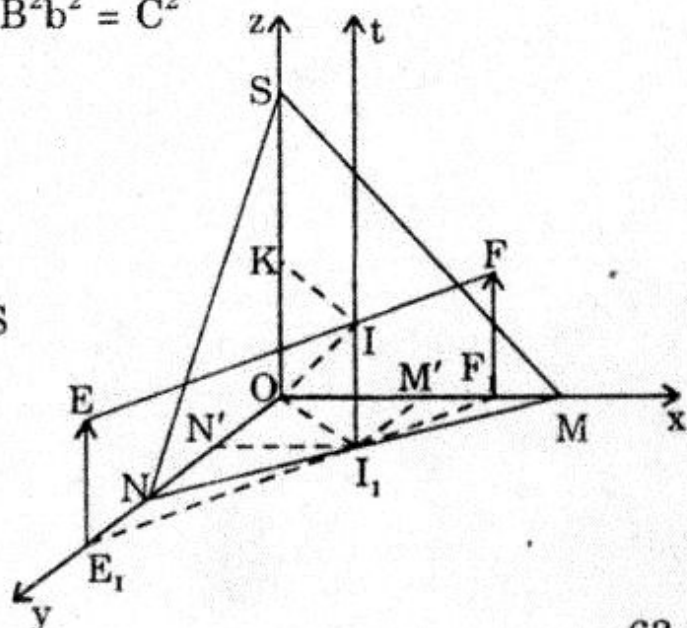
$$(D) \text{ tiếp xúc với } (E) \Leftrightarrow A^2 a^2 + B^2 b^2 = C^2$$

Câu V :

$$1. \text{ Ta có : } V = V_{SOMN} = \frac{1}{3} Bh$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} OM \cdot ON \cdot OS$$

$$= \frac{1}{6} a \cdot OM \cdot ON$$



Theo BĐT Côsi ta có :

$$V \leq \frac{1}{6} a \left(\frac{OM + ON}{2} \right)^2 = \frac{1}{24} a^3$$

$$V_{\text{lớn nhất}} \Leftrightarrow V = \frac{1}{24} a^3 \Leftrightarrow OM = ON = \frac{a}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của V là $\frac{1}{24} a^3$ (đvtt)

2. Gọi I_1 là trung điểm MN . Mặt phẳng trung trực của OS cắt trục I_1t của tam giác OMN tại I . Ta có $IS = IO = IM = IN = R$.

Vậy I là tâm của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $SOMN$. Trong mặt phẳng tọa độ xOy ta có :

$$I_1 \begin{cases} x = OM = \frac{OM}{2} & (x \geq 0) \\ y = ON = \frac{ON}{2} & (y \geq 0) \end{cases}$$

Ta có : $x + y = \frac{a}{2}$

Cho : $x = 0 \Rightarrow y = \frac{a}{2}$

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{2}$

Vậy quỹ tích của I_1 là đoạn F_1E_1 với $F_1\left(\frac{a}{2}, 0\right)$; $E_1\left(0; \frac{a}{2}\right)$

I là điểm tịnh tiến của I_1 theo vectơ $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OS}$

Vậy : quỹ tích của I là đoạn EF tịnh tiến của đoạn E_1F_1 , theo vectơ $\frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{OS}$.

Ta có : $R = OI = \sqrt{\left(\frac{OS}{2}\right)^2 + \left(\frac{OM}{2}\right)^2 + \left(\frac{ON}{2}\right)^2}$

$$\Leftrightarrow R = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + OM^2 + ON^2} \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \frac{1}{2}(OM + ON)^2}$$

$$\Leftrightarrow R \geq \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$R_{\text{nhỏ nhất}} = \frac{a\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow OM = ON = \frac{a}{2}$$

Vậy khi tứ diện có thể tích lớn nhất thì nó lại có bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện nhỏ nhất.

Đề 7

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.
2. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận, M là một điểm tùy ý thuộc (C). Tiếp tuyến với (C) tại M cắt tiệm cận đứng và tiệm cận xiên lần lượt tại A và B. Chứng tỏ rằng M là trung điểm của đoạn AB và diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào M.
3. Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng $y = x$

Câu II :

Cho hệ bất phương trình :
$$\begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \geq 0 \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 \end{cases}$$

1. Giải hệ khi $y = 2$.
2. Tìm tất cả nghiệm nguyên của hệ.

Câu III :

Cho hệ :
$$\begin{cases} m \sin x + (m+1) \cos x + 1 = 0 & (m \text{ là tham số}) \\ 0 \leq x < 2\pi \end{cases}$$

1. Chứng tỏ rằng hệ không thể có quá hai nghiệm.
2. Tìm tất cả giá trị của m để hệ có hai nghiệm cách nhau $\frac{\pi}{2}$.

Câu IV :

1. Tính $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$ (n là số nguyên dương).

Từ kết quả đó, chứng tỏ rằng :

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}$$

Trong đó : $C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

2. Chứng tỏ rằng đường thẳng :
$$\begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

nằm trên mặt phẳng $4x + 3y + 7z - 7 = 0$.

Câu V :

Cho hình cầu tâm O , bán kính R , tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Một hình nón tròn xoay có đáy nằm trên (P) , có chiều cao h , có bán kính đáy bằng R . Hình cầu và hình nón nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) . Người ta cắt hai hình đó bằng một mặt phẳng (Q) song song với (P) và thu được hai thiết diện. Gọi x là khoảng cách giữa (P) và (Q) .

1. Tính tổng diện tích hai thiết diện với giả thiết $x < 2R$ và $x < h$.
2. Khảo sát theo x sự biến thiên của tổng diện tích hai thiết diện này.

Câu 1 :

$$y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

$$\text{MXD : } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(2x - 2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	1	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$			
f'		+	0	-	0	+		
f	$-\infty$	$\nearrow$	CD	$\searrow$	$+\infty$	CT	$\nearrow$	$+\infty$

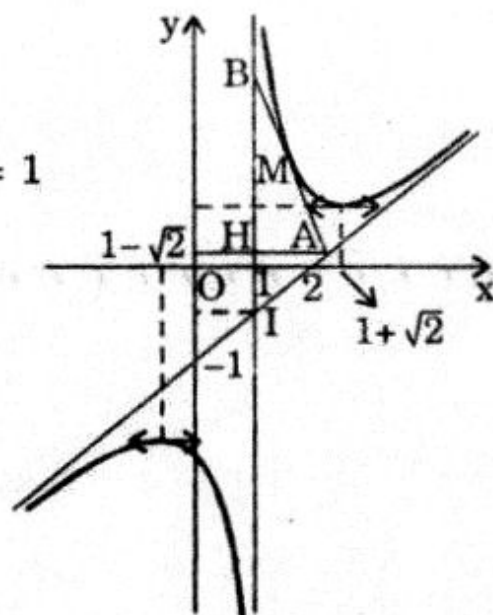
$$\text{CD : } f(1 - \sqrt{2}) = \frac{-1 - 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{CT : } f(1 + \sqrt{2}) = \frac{-1 + 2\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty : \text{tiệm cận đứng } x = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x - 1 + \frac{2}{2x - 2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2}x - 1 : \text{tiệm cận xiên.}$$



Đồ thị :

2. $M(x_0, y_0) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến tại M : (d) : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ (d)
cắt tiệm cận đứng tại B suy ra $x_B = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của tiệm cận xiên và (d) :

$$\frac{1}{2}x - 1 = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x - 1 = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2x_0 - 2} + \frac{2x_0^2 - 4x_0 - 2}{(2x_0 - 2)^2}(x - x_0)$$

$$\Leftrightarrow x = 2x_0 - 1$$

Vậy : $x_A = 2x_0 - 1$

Suy ra : $\frac{x_A + x_B}{2} = x_0$

Vậy M là trung điểm của AB

Ta có : $S = S_{ABI} = \frac{1}{2}BI \cdot HA \quad (1)$

$$S = \frac{1}{2}[(y_B - y_I)(x_A - x_B)]$$

Mà : $x_A = 2x_0 - 1, x_B = 1, y_I = -\frac{1}{2}$

Và : $y_B = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4}{2x_0 - 2} + \frac{2x_0^2 - 4x_0 - 2}{(2x_0 - 2)^2}(1 - x_0)$

$$\Leftrightarrow y_B = \frac{x_0^2 - 3x_0 + 4 - x_0^2 + 2x_0 + 1}{2x_0 - 2} \Leftrightarrow y_B = \frac{5 - x_0}{2x_0 - 2}$$

Do đó : $(1) \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{5 - x_0}{2x_0 - 2} + \frac{1}{2} \right) (2x_0 - 1 - 1) \right] = 2 \text{ (đvdt)}$

Vậy diện tích tam giác IAB không phụ thuộc vào M.

3. Tìm trên (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng (a) : $y = x$.

Xét đường thẳng Δ vuông góc với a, ta có :

$$\Delta : y = -x + m$$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) :

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{2x - 2} = -x + m$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = -2x^2 + 2mx + 2x - 2m$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - (5 + 2m)x + 2m + 4 = 0 \quad (1)$$

Giả sử Δ cắt (C) tại $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$.

Gọi M là trung điểm của M_1M_2 , ta có :

$$M \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{5 + 2m}{6} \\ y_M = -x_M + m = \frac{4m - 5}{6} \end{cases}$$

M_1 và M_2 đối xứng nhau qua (d)

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow M \in d &\Leftrightarrow y_M = x_M &\Leftrightarrow \frac{5 + 2m}{6} = \frac{4m - 5}{6} \\ &&\Leftrightarrow m = 5 \end{aligned}$$

Thay vào (1), ta có : $3x^2 - 15x + 14 = 0$

$$\Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{57}}{6}$$

Vậy hai điểm trên (C) đối xứng nhau qua $y = x$ là :

$$M_1 \left(\frac{15 + \sqrt{57}}{6}, \frac{15 - \sqrt{57}}{6} \right)$$

$$M_2 \left(\frac{15 - \sqrt{57}}{6}, \frac{15 + \sqrt{57}}{6} \right)$$

Câu II :

Cho hệ bất phương trình :

$$(I) \begin{cases} y - |x^2 - x| - 1 \geq 0 & (1) \\ |y - 2| + |x + 1| - 1 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

1. Giải hệ khi $y = 2$

$$(1) \Leftrightarrow |x^2 - x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x^2 - x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 \geq 0 \\ x^2 - x - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 \leq 0.$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$(2) \Leftrightarrow |x + 1| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 0$$

Vậy nghiệm của hệ là : $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \leq x \leq 0$

2. Tìm tất cả các nghiệm nguyên của hệ :

$$(II) \begin{cases} |x^2 - x| \leq y - 1 & (1) \\ |x + 1| \leq 1 - |y - 2| & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow |x + 1| \leq 1 \Rightarrow -2 \leq x \leq 0 \\ \Rightarrow x \in \{-2; -1; 0\}$$

TH 1 : $x = -2$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 \leq y - 1 \\ 1 \leq 1 - |y - 2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 7 \\ y = 2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

TH 2 : $x = -1$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq y - 1 \\ 0 \leq 1 - |y - 2| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ |y - 2| \leq 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 3 \\ 1 \leq y \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow y = 3$$

Ta được nghiệm $(-1, 3)$.

TH 3 : $x = 0$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ |y - 2| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2$$

Vậy tất cả các nghiệm nguyên của hệ là : $(-1, 3)$ và $(0, 2)$

Câu III :

$$\text{Cho hệ : } \begin{cases} m \sin x + (m+1) \cos x + 1 = 0 \\ 0 \leq x < 2\pi \end{cases} \quad (1)$$

1. Chứng tỏ rằng hệ không thể có quá hai nghiệm.

Nếu $m = 0$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ 0 \leq x < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow x = \pi$$

Nếu $m \neq 0$, ta có : $x \neq \pi$

Đặt : $t = \tan \frac{x}{2}$

Ta thấy mỗi giá trị $x \in (0; 2\pi)$ sẽ cho một giá trị t duy nhất và ngược lại :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow m \frac{2t}{1+t^2} + (m+1) \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2mt + m + 1 - (m+1)t^2 + 1 + t^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow mt^2 - 2mt - m - 2 = 0 \end{aligned}$$

Do (2) là phương trình không thể có quá 2 nghiệm t nên (1) không thể có quá 2 nghiệm x .

$$\begin{aligned} 2. \quad x_1 &= x_2 + \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \frac{x_1}{2} &= \frac{x_2}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow t_1 = \frac{t_2 + 1}{1 - t_2} \\ \Rightarrow t_1 - t_2 &= t_1 t_2 + 1 \Rightarrow \frac{2\sqrt{\Delta'}}{a} = \frac{c}{a} + 1 \\ \Rightarrow 2\sqrt{\Delta'} &= c + a \Rightarrow 2\sqrt{\Delta'} = -2 \text{ (vô lí)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Không có giá trị nào của m để hệ có 2 nghiệm cách nhau $\frac{\pi}{2}$.

Câu IV :

$$1. \text{ Tính : } I_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$$

Dùng phương pháp tích phân từng phần

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = (1 - x^2)^n \\ dv = dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = -2nx(1 - x^2)^{n-1} dx \\ v = x \end{cases}$$

$$\Rightarrow I_n = x(1 - x^2)^n \Big|_0^1 + 2n \int_0^1 x^2(1 - x^2)^{n-1} dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = 2n \int_0^1 (1 - x^2 - 1 + 1)(1 - x^2)^{n-1} dx \\ = -2n \int_0^1 (1 - x^2)^n dx + 2n \int_0^1 (1 - x^2)^{n-1} dx$$

$$\Leftrightarrow I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1} \quad (n \geq 1).$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)\dots 5.3} I_0$$

$$\text{Xét riêng : } I_0 = \int_0^1 (1 - x^2)^0 dx = \int_0^1 1 \cdot dx = 1$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n(2n-2)\dots 4.2}{(2n+1)(2n-1)\dots 5.3}$$

Mặt khác ta lại có :

$$I_n = \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \\ = \int_0^1 \left[1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n} \right] dx \\ = \left[x - C_n^1 \frac{x^3}{3} + C_n^2 \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n C_n^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \right] \Big|_0^1 \\ = 1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra :

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2.4.6\dots 2n}{1.3.5\dots (2n+1)}$$

2. Chứng tỏ rằng đường thẳng :

$$(I) \quad \begin{cases} 5x - 3y + 2z - 5 = 0 \\ 2x - y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad (d) \quad (d)$$

nằm trong mặt phẳng : $4x - 3y + 7z - 7 = 0$

Thay $z = 0$ vào (I) ta được : $x = -2$ và $y = -5$

Thay $y = 0$ vào (I) ta được : $x = \frac{7}{9}$ và $z = \frac{5}{9}$

Vậy ta tìm được trên đường thẳng (d) hai điểm :

$$A(-2, -5; 0) \quad \text{và} \quad B\left(\frac{7}{9}; 0; \frac{5}{9}\right)$$

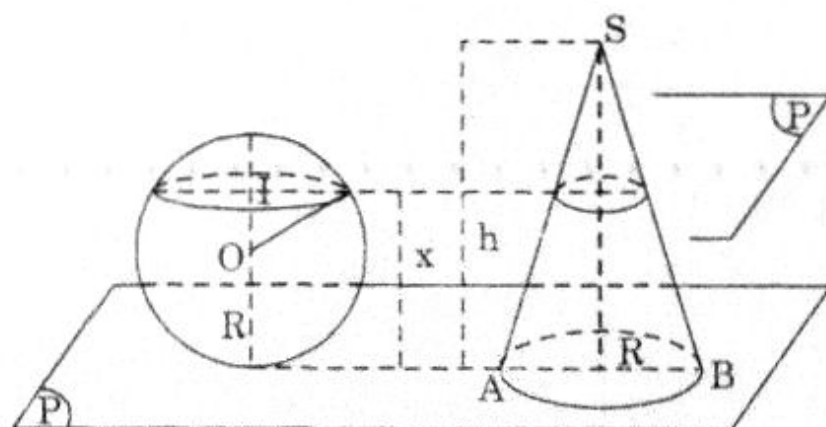
Thay tọa độ A, B vào phương trình mặt phẳng (α) ta thấy thỏa:

$$-8 + 15 - 7 = 0$$

$$\frac{28}{9} + \frac{35}{9} - 7 = 0$$

Vậy A, B thuộc (α) suy ra đường thẳng (d) nằm trong mặt phẳng (α).

Câu V :



1. Gọi S_1 là diện tích thiết diện tạo bởi (Q) và mặt cầu, S_2 là diện tích thiết diện tạo bởi (Q) và mặt nón.

Ta có : $S_1 = \pi r^2 = \pi[R^2 - (x - R)^2] = \pi(2Rx - x^2)$

$$\frac{S_2}{S} = \frac{(h-x)^2}{h^2} \Rightarrow S_2 = \frac{\pi R^2}{h^2} (h-x)^2$$

$$\Rightarrow f(x) = S_1 + S_2 = \pi(2Rx - x)^2 + \frac{\pi R^2}{h^2} (h-x)^2$$

$$f(x) = \frac{\pi(R^2 - h^2)x^2 - 2\pi Rh(R-h)x + \pi R^2 h^2}{h^2}$$

2.

$$f'(x) = \frac{2\pi(R^2 - h^2)x - 2\pi Rh(R-h)}{h^2}$$

$$= \frac{2\pi(R-h)[(R+h)x - Rh]}{h^2}$$

TH 1: $R > h$

x	0	$\frac{Rh}{R+h}$	h
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

TH 2: $R < h < 2R$

x	0	$\frac{Rh}{R+h}$	h
f'	+	0	-
f	$\nearrow$		$\searrow$

TH 3: $2R \leq h$

x	0	$\frac{Rh}{R+h}$	2R
f'	+	0	-
f	$\nearrow$		$\searrow$

TH 4: $h = R$

$$f(x) = \pi R^2 = \text{const} \quad \forall x \in [0, R]$$

Đề 8

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{-x^2 + x + a}{x + a}$ trong đó a là tham số.

1. Xác định a để đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(2; 0)$. Vẽ đồ thị hàm số trong trường hợp đó.
2. Xác định tất cả các giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt. Khi đó gọi y_1, y_2 là tung độ của hai giao điểm, hãy tìm một hệ thức giữa y_1, y_2 không phụ thuộc a .

Câu II :

1. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1$
2. Giải phương trình : $4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1$

Câu III :

1. Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có :

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

với r, R là bán kính đường tròn nội tiếp. ngoại tiếp tam giác ABC .

2. Cho a, b, c là 3 số tùy ý thuộc đoạn $[0; 1]$. Chứng minh :

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1$$

Câu IV :

1. Cho $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$

a) Tìm hai số A, B sao cho $f(x) = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)$

b) Tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm $A(0; 1; 1)$ vuông góc với đường thẳng (d_1) .

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$$

và cắt đường thẳng (d_2) :
$$\begin{cases} x+y-z+2=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$

Câu V :

Cho góc tam diện $Sxyz$ đỉnh S , với $xSy = 120^\circ$, $ySz = 60^\circ$, $zSx = 90^\circ$.
Trên các tia Sx , Sy , Sz theo thứ tự lấy các điểm A , B , C sao cho $SA = SB = SC = a$

1. Chứng tỏ rằng ABC là một tam giác vuông. Xác định hình chiếu vuông góc H của tứ diện $SABC$ theo a .
2. Tính bán kính cầu nội tiếp tứ diện $SABC$ theo a .
3. Tính góc phẳng của nhị diện (SAC, BAC) .

Giải

Câu I :

Cho hàm số :
$$y = \frac{-x^2 + x + a}{x + a}$$

1. Xác định a để đồ thị của hàm số có tiệm cận xiên đi qua điểm $A(2; 0)$.

Ta có :
$$y = -x + a + 1 - \frac{a^2}{x + a}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - (-x + a + 1)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-a^2}{x + a} = 0 \Rightarrow \text{hàm số có}$$

tiệm cận xiên :

$$(\Delta) : y = -x + a + 1$$

$$A \in (\Delta) \Leftrightarrow 0 = -2 + a + 1 \Leftrightarrow a = 1$$

Khi đó ta có :
$$y = f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

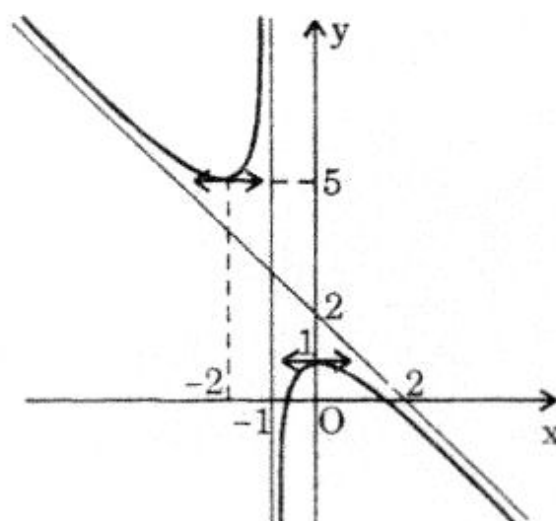
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'		-	0	+	
f	$+\infty$		$+\infty$		$-\infty$
		↘	↗	↘	
		5		1	
			$-\infty$		$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty \Rightarrow \text{tiệm cận đứng } x = -1$$

Đồ thị có tiệm cận xiên $y = -x + 2$.

Đồ thị :



2. Xác định tất cả các giá trị của a để đồ thị của hàm số cắt đường thẳng $y = x - 1$ tại hai điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d).

$$\frac{-x^2 + x + a}{x + a} = x - 1 \quad (x \neq -a)$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + a = x^2 - x + ax - a$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (a - 2)x - 2a = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (a - 2)^2 + 16a = a^2 + 12a + 4$$

(C) cắt (d) tại hai điểm phân biệt.

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có 2 nghiệm khác } -a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ a^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < -6 - 4\sqrt{2} \\ a > -6 + 4\sqrt{2} \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) theo Viet ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2-a}{2} \\ x_1 x_2 = -a \end{cases} \quad (1)$$

$$(2) \Rightarrow a = -x_1 x_2$$

$$(1) \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2 + x_1 x_2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) = 2 + x_1 x_2 \quad (3)$$

Ta lại có : $\begin{cases} y_1 = x_1 - 1 \\ y_2 = x_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = y_1 + 1 \\ x_2 = y_2 + 1 \end{cases}$

$$(3) \Rightarrow 2(y_1 + y_2 + 2) = 2 + (y_1 + 1)(y_2 + 1)$$

$$\Rightarrow 2(y_1 + y_2) + 4 = 2 + y_1 y_2 = y_1 + y_2 + 1$$

$$\Rightarrow y_1 y_2 - (y_1 + y_2) - 1 = 0$$

Câu II :

1. Giải phương trình : $\sqrt[3]{x+34} - \sqrt[3]{x-3} = 1 \quad (1)$

Áp dụng hằng đẳng thức : $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow (x+34) - (x-3) - 3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)} = 1$$

$$\Leftrightarrow 36 = 3\sqrt[3]{(x+34)(x-3)} \Leftrightarrow 12 = \sqrt[3]{(x+34)(x-3)}$$

$$\Leftrightarrow 1728 = (x+34)(x-3) \Leftrightarrow x^2 + 31x - 1830 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -106 \vee x = 75$$

$$2. \text{ Giải phương trình : } 4\cos x - 2\cos 2x - \cos 4x = 1 \quad (1)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} (1) & \Leftrightarrow 1 + \cos 4x + 2\cos 2x - 4\cos x = 0 \\ & \Leftrightarrow 2\cos^2 2x + 2\cos 2x - 4\cos x = 0 \\ & \Leftrightarrow 2\cos 2x(\cos 2x + 1) - 4\cos x = 0 \\ & \Leftrightarrow 4\cos^2 x \cos 2x - 4\cos x = 0 \\ & \Leftrightarrow 4\cos x |\cos x \cdot \cos 2x - 1| = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x \cdot \cos 2x = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$TH 1: \quad \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} TH 2: \quad \cos x \cdot \cos 2x = 1 & \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos 2x = -1 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là : } \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu III :

1. Chứng minh rằng trong một tam giác ABC ta đều có :

$$1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$$

Trong tam giác ABC ta có :

$$\begin{aligned} \cos A + \cos B + \cos C &= 2\cos \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} + 1 - 2\sin^2 \frac{C}{2} \\ &= 1 + 2\sin \frac{C}{2} \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] \\ &= 1 + 4\sin \frac{C}{2} \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \end{aligned}$$

Trong tam giác ABC ta cũng có :

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

Vậy : $1 + \frac{r}{R} = \cos A + \cos B + \cos C$

2. Cho a, b, c là 3 số tùy ý thuộc đoạn [0, 1], Chứng minh rằng :

$$\frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 1 \quad (1)$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử : $a \geq b \geq c$.

Ta có :

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \frac{a}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 0. \\ &\Leftrightarrow \frac{a-1-b-c}{b+c+1} + \frac{b}{a+c+1} + \frac{c}{a+b+1} + (1-a)(1-b)(1-c) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (a-1) \left[\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c) \right] + b \left[\frac{1}{a+c+1} - \frac{1}{b+c+1} \right] \\ &\quad + c \left[\frac{1}{a+b+1} - \frac{1}{b+c+1} \right] \leq 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh :

$$\frac{1}{b+c+1} - (1-b)(1-c) \geq 0 \quad (3)$$

Ta có :

$$\begin{aligned} (3) &\Leftrightarrow 1 - (b+c+1)(1-b-c+bc) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow b^2 + c^2 - b^2c - c^2b + bc \geq 0 \\ &\Leftrightarrow b^2(1-c) + c^2(1-b) + bc \geq 0 \quad (4) \end{aligned}$$

Theo giả thiết, (4) đúng $\Rightarrow$ (3) đúng $\Rightarrow$ (2) đúng.

Vậy (1) đúng.

Câu IV :

1. Cho $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}$

a) Tìm hai số A, B sao cho : $f(x) = A + B \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right)$

Ta có : $\frac{\sin x}{\cos x + \sin x} = \frac{(A + B) \cos x + (A - B) \sin x}{\cos x + \sin x}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$$

b) Tính $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

Ta có : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} \right) \right] dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \ln |\cos x + \sin x| \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

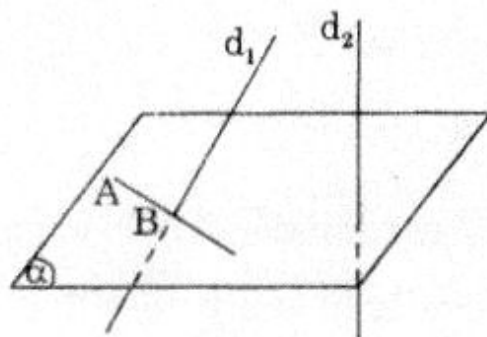
$$\Rightarrow I = \frac{\pi}{4}$$

2. Lập phương trình đường thẳng đi qua điểm A(0; 1; 1) vuông góc với đường thẳng (d_1) :

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$$

và cắt đường thẳng (d_2) :

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$



Gọi α là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d_1 ta có :

$$\vec{n}_\alpha = \vec{a}_{d_1} = (3; 1; 1)$$

$$(\alpha) : 3x + y + z + D = 0$$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -2$$

$$\Rightarrow (\alpha) : 3x + y + z - 2 = 0$$

Phương trình tham số của d_2 :

$$d_2 : \begin{cases} x = -1 \\ y = t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

Gọi B là giao điểm của (α) và (d_2) , ta có :

$$B \in (d_2) \Rightarrow B(-1; t; 1 + t)$$

$$B \in (\alpha) \Rightarrow -3 + t + 1 + t - 2 = 0 \Rightarrow t = 2$$

Vậy : d_2 cắt (α) tại $B(-1; 2; 3)$.

Gọi Δ là đường thẳng qua A vuông góc với d_1 và cắt d_2 , ta có

$$\Delta = AB$$

$$\vec{a}_\Delta = \vec{AB} = (-1; 1; 2)$$

$$\text{Phương trình của } \Delta \text{ là : } \frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}.$$

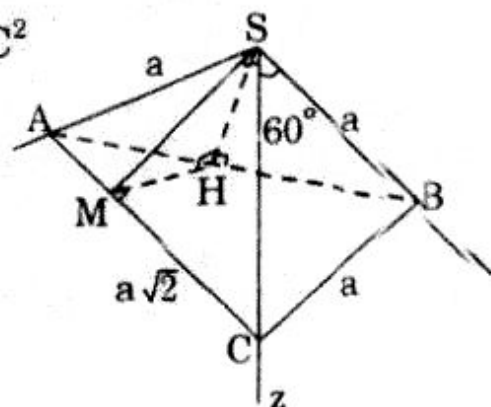
Câu V :

1. Chứng tỏ rằng ABC là một tam giác vuông.

$$\left. \begin{array}{l} AB = a\sqrt{3} \\ AC = a\sqrt{2} \\ BC = a \end{array} \right\} \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$$

Vậy tam giác ABC vuông tại C.

Gọi H là trung điểm của AB ta có :



$$\left. \begin{array}{l} HA = HB = HC \\ SA = SB = SC \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

Vậy H là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC).

2. Tính bán kính cầu nội tiếp tứ diện SABC theo a.

$$\text{Ta có: } V = V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$$

$$S_{tp} = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$$

$$\Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} (\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$$

3. Gọi M là trung điểm AC, ta có $HM \perp AC$.

$$\Rightarrow SM \perp AC \Rightarrow \alpha = \widehat{SMH} = ((SAC), (BAC))$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{SH}{MH} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a}{2}} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Vậy góc phẳng của nhị diện (SAC, BAC) bằng 45° .

Đề 9

Câu 1:

Cho tham số thực m và (C_m) là đồ thị của hàm số:

$$y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$$

1. Tìm các điểm cố định của họ đường cong (C_m) .
2. Tìm m sao cho (C_m) tiếp xúc với trục hoành.
3. Tìm quỹ tích điểm uốn I_m của (C_m) khi m thay đổi.

Câu II :

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 6 \end{cases}$$

2. Giải phương trình : $2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$.

Câu III :

1. Giải phương trình : $|\operatorname{tg} x| = \cot g x + \frac{1}{\cos x}$

2. Trong tam giác ABC, số đo ba góc A, B, C tạo thành một cấp số cộng với $A \geq B \geq C$. Giả sử rằng :

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

a) Hãy tính số đo của góc A, B và C.

b) Tìm độ dài các cạnh của tam giác ABC nếu biết thêm bán kính của đường tròn nội tiếp của nó là $r = 1$.

Câu IV :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn (Oxy, cho hai điểm $A(a, 0)$ và $B(0, a)$ với $a > 0$. Cho tham số thực $m \neq 0$ và $m \neq a$.

1. Hãy viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại A và có tâm I thỏa $y_I = m$, (y_I là tung độ của I).
2. (C) cắt đường thẳng AB tại A và P. Hãy tìm tọa độ của P. Từ đó hãy viết phương trình đường tròn (E) đi qua P và tiếp xúc với trục tung tại B.
3. (C) và (E) cắt nhau tại P và Q. Chứng minh rằng đường thẳng PQ luôn luôn đi qua một điểm cố định.

Câu V :

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác OAB với $OA = OB$, $AB = 2a$ và đường cao $AH = h$. Trên đường thẳng (d) vuông góc với (P) tại O, lấy điểm M với $OM = x$. Gọi E và F lần lượt là hình

chiếu vuông góc của A là MB và OB; N là giao điểm của EF và (d).

1. Chứng minh $MB \perp NA$ và $MA \perp NB$.
2. Tính BE, BF, AF và thể tích tứ diện ABEF theo a, h và x.
3. Tìm vị trí của M trên (d) sao cho tứ diện MNAB có thể tích nhỏ nhất và tính giá trị nhỏ nhất này.

Giải

Câu 1:

Cho tham số thực m và (C_m) là đồ thị của hàm số :

$$y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$$

1. Tìm các điểm cố định của họ đường cong (C_m)

$$M(x, y) \in (C_m) \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow y = -x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|)$$

$$\Leftrightarrow (m - |m|)(x^2 - 4) + (-x^3 + 4x - y) = 0 \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ -x^3 + 4x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \vee y = 0 \\ x = -2 \vee y = 0 \end{cases}$$

Vậy các điểm cố định của (C_m) là : $M_1(2; 0); M_2(-2; 0)$

2. Tìm m sao cho (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$-x^3 + (m - |m|)x^2 + 4x - 4(m - |m|) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m - |m|)(x^2 - 4) - x(x^2 - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 4)(m - |m| - x) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \\ x = m - |m| \end{cases}$$

(C_m) tiếp xúc với Ox :

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow -2 = m - |m| \Leftrightarrow m = -1$$

3. Tìm quỹ tích điểm uốn I_m của (C_m) khi m thay đổi.

$$I_m(x_1, y_1) \text{ là điểm uốn} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = -3x^2 + 2(m - |m|)x + 4$$

$$f''(x) = -6x + 2(m - |m|)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow m - |m| = 3x_1$$

$$\Rightarrow y_1 = -x_1^3 + 3x_1^3 + 4x_1 - 12x_1$$

$$\Leftrightarrow y_1 = 2x_1^3 - 8x_1$$

$$\text{Do } m - |m| \leq 0 \Rightarrow x_1 \leq 0$$

Vậy quỹ tích I_m là phần của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 8x$ thỏa điều kiện giới hạn $x \leq 0$.

Câu II :

$$1. \text{ Giải hệ phương trình : } \begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 & (1) \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 6 & (2) \end{cases}$$

Đặt $y = kx$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x^2(3 - 5k - 4k^2) = -3 \\ x^2(9k^2 + 11k - 8) = 6 \end{cases} \Rightarrow \frac{9k^2 + 11k - 8}{-4k^2 - 5k + 3} = -2$$

$$\Rightarrow 9k^2 + 11k - 8 = 8k^2 + 10k - 6 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

$$\Rightarrow k = 1 \vee k = -2$$

TH 1 : $k = 1$

$$\Rightarrow x^2(3 - 5 - 4) = -3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$TH\ 2 : k = -2$$

$$\Rightarrow x^2(3 + 10 - 16) = -3$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \wedge y = -2 \\ x = -1 \wedge y = 2 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}; \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}; \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$2. \text{ Giải phương trình : } 2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}} \quad (1)$$

$$\text{Ta có : (1)} \Leftrightarrow 1\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$$

$$\text{Đặt : } f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$$

Ta có : $f(x)$ là hàm số giảm, lại có : $f(2) = 1$

Vậy : phương trình $f(x) = 1$ có nghiệm duy nhất $x = 2$.

Câu III :

$$1. \text{ Giải phương trình : } |\operatorname{tg} x| = \cot g x + \frac{1}{\cos x} \quad (1)$$

$$TH\ 1 : \operatorname{tg} x > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = \cot g x + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \quad (\sin x \cdot \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x = 1 - \sin^2 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - \sin x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \text{ (loại)} \\ \sin x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (\operatorname{tg} x > 0), k \in \mathbb{Z}$$

TH 2 : $\operatorname{tg} x < 0$

$$(1) \Leftrightarrow -\operatorname{tg} x = \cot x + \frac{1}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} \quad (\sin x \cdot \cos x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x = \cos^2 x + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = -1 \quad (\text{loại})$$

Vậy phương trình chỉ có nghiệm :

$$x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2.a) $A \geq B \geq C$.

$$\text{Ta có : } \begin{cases} A + B + C = \pi \\ A + C = 2B \end{cases} \Rightarrow B = \frac{\pi}{3}$$

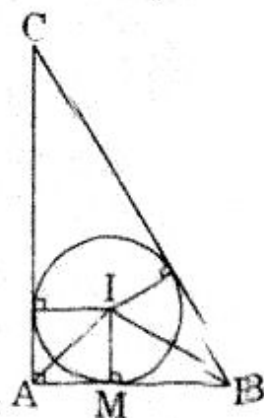
$$\Rightarrow A + C = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Ta có : } \cos A + \cos B + \cos C = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos C + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos A + \cos C = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{A+C}{2} \cdot \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\Rightarrow \cos \frac{A-C}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \begin{cases} A-C = \frac{\pi}{3} \\ A+C = \frac{2\pi}{3} \end{cases} .$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{2} ; C = \frac{\pi}{6}$$

b) $r = 1$

$$AB = AM + MB = r \cotg 45^\circ + r \cotg 30^\circ = 1 + \sqrt{3}$$

$$BC = 2AB = 2(1 + \sqrt{3})$$

$$AC = \frac{BC\sqrt{3}}{2} = 3 + \sqrt{3}$$

Câu IV : Hướng dẫn : PQ luôn đi qua O.

Câu V :

$$OF = \frac{h^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$\Rightarrow BF = OB - OF = \sqrt{a^2 + h^2} - \frac{h^2 - a^2}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$BF = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$BE \cdot BM = BF \cdot BO = 2a^2$$

$$\Rightarrow BE = \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + h^2 + x^2}}$$

$$\frac{EF}{OM} = \frac{BF}{BM} \Rightarrow EF = \frac{OM \cdot BF}{BM}$$

$$EF = \frac{2a^2 x}{\sqrt{a^2 + h^2} (a^2 + h^2 + x^2)}$$

$$AF \cdot OB = OH \cdot AB \Rightarrow \frac{2ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

$$V = V_{ABRE} \cdot \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{6} AF \cdot EF \cdot BE$$

$$V = \frac{1}{6} \frac{2ah}{\sqrt{a^2 + h^2}} \cdot \frac{2a^2 x}{\sqrt{a^2 + h^2}(\sqrt{a^2 + h^2 + x^2})} \cdot \frac{2a^2}{\sqrt{a^2 + h^2 + x^2}}$$

$$V = \frac{4a^5 hx}{3(a^2 + h^2)(a^2 + h^2 + x^2)}$$

Đề 10

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + (m+2)x + 3m + 2}{x + 1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m = 0$.
2. Xác định m để hàm số có cực đại, cực tiểu.
3. Giả sử y có giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} . Chứng minh rằng :

$$y_{CD}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}$$

Câu II :

Cho phương trình : $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m$

1. Hãy giải phương trình với $m = 0$ bằng cách đặt :

$$t = |\sin x - \cos x|.$$

2. Tìm tất cả các giá trị m để phương trình có nghiệm.

Câu III :

Cho hàm số : $y = \left| \log_{2x^2-1}(7-2x^2) + \log_{7-2x^2}(2x^2-1) \right|$

1. Tìm miền xác định của y .

2. Tìm giá trị nhỏ nhất của y . Tìm tất cả các giá trị của x để y đạt giá trị nhỏ nhất đó.

Câu IV :

Cho tam giác ABC có AM là trung tuyến, AD là phân giác trong của góc A.

Đặt $\widehat{MAB} = \beta$; $\widehat{MAC} = \gamma$ và $\widehat{MAD} = \alpha$

1. Chứng minh rằng : $\frac{\sin \beta}{\sin \gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$
2. Giả sử $AC \geq AB$. Chứng minh rằng :

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{B - C}{2} \right)$$

Câu V :

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng D_1, D_2 có phương trình :

$$(D_1) : kx - y + k = 0$$

$$(D_2) : (1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0$$

1. Chứng minh rằng khi k thay đổi, đường thẳng D_1 luôn đi qua một điểm cố định.
2. Với mỗi giá trị k , hãy xác định giao điểm của D_1 và D_2
3. Tìm quỹ tích của giao điểm đó, khi k thay đổi.

Câu VI :

Hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân, $AB = AC = a$.

$(ABC) \perp (SBC)$ và $SA = SB = a$

1. Chứng tỏ rằng SBC là một tam giác vuông.
2. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp, biết $SC = x$.

(Thí sinh khối B không phải làm mục 3 của câu I).

Giải

Câu 1 :

$$y = f(x) = \frac{x^2 + (m+2)x + 3m+2}{x+1}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số với $m = 0$

Với $m = 0 \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

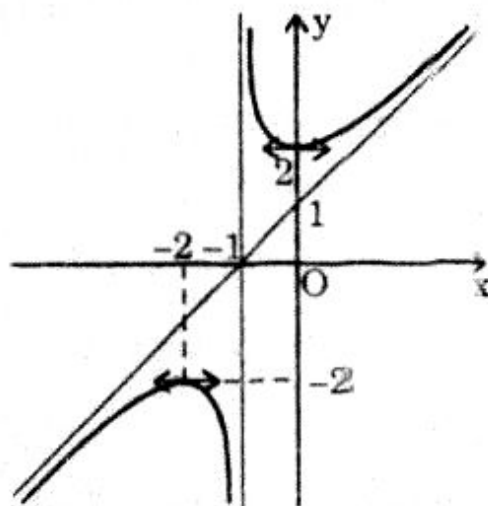
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$
f'		+ 0 -		- 0 +	
f	$-\infty$	-2	$+\infty$	2	$+\infty$

Tiệm cận đứng $x = -1$

Tiệm cận xiên $y = x + 1$

Đồ thị :



2. Xác định m để hàm số có cực đại và cực tiểu

Ta có : $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 2m}{(x+1)^2}$

$f(x)$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + 2m > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$$

3. Chứng minh rằng : $y_{CD}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow m > \frac{-1}{2}$

Giả sử $f(x)$ đạt cực trị tại $x_1 > x_2$.

Theo Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -2m \end{cases}$

$$\begin{aligned} y_{CD}^2 + y_{CT}^2 &= (2x_1 + m + 2)^2 + (2x_2 + m + 2)^2 \\ &= 4(x_1^2 + x_2^2) + 4(m + 2)(x_1 + x_2) + 2(m + 2)^2 \\ &= 4|4 + 4m| - 8(m + 2) + 2(m + 2)^2 \\ &= 2m^2 + 16m + 8 \end{aligned}$$

Đặt : $g(m) = 2m^2 + 16m + 8$

$$\Rightarrow g'(m) = 4m + 16 = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

m	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
g'		+
g	$\frac{1}{2}$	$\rightarrow +\infty$

Vậy : $y_{CD}^2 + y_{CT}^2 > \frac{1}{2}$

Câu III :

$$|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = m \quad (1)$$

Đặt : $t = |\sin x - \cos x|$

Ta có : $t = \left| \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| \Rightarrow 0 \leq t \leq \sqrt{2}$

Suy ra : $\sin 2x = 1 - t^2$

$$\text{Do đó : } (1) \Leftrightarrow -4t^2 + t + 4 = m \quad (2)$$

1. Giải phương trình khi $m = 0$

$$(2) \Leftrightarrow 4t^2 - t - 4 = 0 \Rightarrow t = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$$

$$\text{Lúc đó : } \left| \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| = \pm \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \pm \frac{1 + \sqrt{17}}{8\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} \pm \alpha + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Với : } \alpha = \arcsin\left(\frac{1 + \sqrt{17}}{8\sqrt{2}}\right)$$

2. Giá trị của m để phương trình có nghiệm.

$$\text{Đặt : } f(t) = -4t^2 + t + 4$$

$$\Rightarrow f'(t) = -8t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{8}$$

Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	0	$\frac{1}{8}$	$\sqrt{2}$
f'	+	0	-
f	4	$\frac{65}{16}$	$\sqrt{2} - 4$

$$(1) \text{ có nghiệm } x \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \text{ thuộc đoạn } [0; \sqrt{2}]$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} - 4 \leq m \leq \frac{65}{16}$$

Câu III :

$$y = \left| \log_{2x^2-1}(7-2x^2) + \log_{7-2x^2}(2x^2-1) \right|$$

1. Tìm miền xác định của y.

y xác định khi :

$$\begin{cases} 2x^2 - 1 > 0 \\ 2x^2 - 1 \neq 1 \\ 7 - 2x^2 > 0 \\ 7 - 2x^2 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \pm 1 \\ x \neq \pm \sqrt{3} \\ -\frac{\sqrt{14}}{2} < x < \frac{\sqrt{14}}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x < -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

Vậy : MXĐ : $D = \left(-\frac{\sqrt{14}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{14}}{2} \right) \setminus \{ \pm 1, \pm \sqrt{3} \}$

$$\begin{aligned} 2. \quad y &= \left| \log_{2x^2-1}(7-2x^2) + \log_{7-2x^2}(2x^2-1) \right| \\ &= \left| \log_{2x^2-1}(7-2x^2) + \frac{1}{\log_{2x^2-1}(7-2x^2)} \right| \end{aligned}$$

Đặt : $\log_{2x^2-1}(7-2x^2) = t$

$$\Rightarrow y = f(t) = \left| t + \frac{1}{t} \right| = \frac{t^2 + 1}{|t|} \geq \frac{2|t|}{|t|} = 2$$

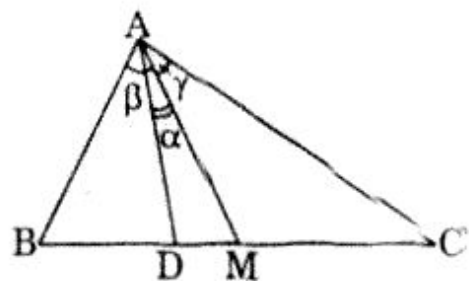
$$\Rightarrow y_{\min} = 2 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{2x^2-1}(7-2x^2) = 1 \\ \log_{2x^2-1}(7-2x^2) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}} \\ x = \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{cases}$$

Câu IV :

1. Chứng minh rằng : $\frac{\sin B}{\sin \gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \frac{BM}{\sin \beta} = \frac{AM}{\sin B} & (1) \\ \frac{CM}{\sin \gamma} = \frac{AM}{\sin C} & (2) \end{cases}$$



$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow \frac{\sin B}{\sin \gamma} = \frac{\sin B}{\sin C}$$

2. Giả sử $AC \geq AB$

$$\text{Chúng minh rằng : } \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{B-C}{2} \right)$$

$$\text{Ta có : } \begin{cases} \beta - \alpha = \frac{A}{2} \\ \gamma + \alpha = \frac{A}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{A}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} \\ \gamma = \frac{\beta - \gamma}{2} \end{cases}$$

Theo câu 1 ta có :

$$\begin{aligned} & \frac{\sin B}{\sin \beta} = \frac{\sin C}{\sin \gamma} \\ \Rightarrow & \frac{\sin B - \sin C}{\sin \beta - \sin \gamma} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin \beta + \sin \gamma} \\ \Rightarrow & \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{\beta+\gamma}{2} \sin \frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \cos \frac{\beta-\gamma}{2}} \\ \Rightarrow & \operatorname{tg} \frac{\beta-\gamma}{2} = \operatorname{tg} \frac{\beta+\gamma}{2} \cotg \frac{B+C}{2} \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \\ \Rightarrow & \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}^2 \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B-C}{2} \end{aligned}$$

Câu V :

$$(D_1) : kx - y + k = 0$$

$$(D_2) : (1 - k^2)x + 2ky - (1 + k^2) = 0$$

1. Chứng minh rằng khi k thay đổi, đường thẳng D luôn đi qua một điểm cố định.

Xét điểm $M_0(x_0, y_0)$

$$M_0 \in (D_1) \quad , \quad \forall k$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow kx_0 - y_0 + k &= 0, \quad \forall k \\ \Leftrightarrow k(x_0 + 1) - y_0 &= 0, \quad \forall k \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + 1 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy : D_1 luôn đi qua $M_0(-1; 0)$.

2. $M(x, y) = D_1 \cap D_2 \Rightarrow x, y$ là nghiệm của hệ :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} kx - y + k = 0 \\ (1 - k^2)x + 2ky - (1 - k^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - k^2}{1 + k^2} \\ y = \frac{2k}{1 + k^2} \end{cases}$$

($x \neq -1$)

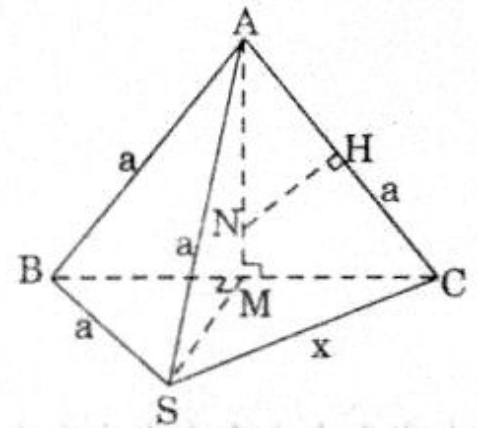
Đặt : $k = \tan \frac{\alpha}{2}$

Ta có : $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases} (x \neq -1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Vậy quỹ tích M là đường tròn tâm O , bán kính 1 loại bỏ điểm $M_0(-1; 0)$.

Câu VI :

1. Dựng $AM \perp BC$ tại M
 $\Rightarrow AM \perp (SBC)$ tại M
 Mà : $AB = AS = AC = a$ (gt)
 $\Rightarrow MB = MC = MS$
 $\Rightarrow \widehat{BSC} = 90^\circ$



2. Trong tam giác ABC trung trực của AC cắt AM tại N, ta có N là tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện S.ABC.

$$\bullet \Delta AMC \text{ cho : } AM^2 = AC^2 - MC^2 = a^2 - \frac{1}{4}(a^2 - x^2) = \frac{1}{4}(3a^2 - x^2)$$

$$\Rightarrow AM = \frac{1}{2} \sqrt{3a^2 - x^2}$$

- $$\bullet \Delta AMC \text{ cho : } AN \cdot AM = AH \cdot AC \text{ (với H là hình chiếu của } \omega \text{ lên AC)}$$

$$\Rightarrow R = AN = \frac{AC^2}{2AM} = \frac{a^2}{\sqrt{3a^2 - x^2}}$$

Đề 11

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{ax^2 - (3a - 1)x + 2a}{x - 1} \quad (a \neq 0)$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $a = 1$.
2. Viết phương trình tiếp cận xiên của đồ thị (1). Chứng minh rằng tiếp cận xiên này luôn đi qua một điểm cố định với mọi a .

Câu II :

1. Giải phương trình :
$$\frac{(3 + 2 \sin x) \cos x - (1 + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} = 1$$
2. Giải bất phương trình :
$$\frac{\log_2(x^2 - 9x + 8)}{\log_2(3 - x)} < 2$$

Câu III :

1. Cho tam giác ABC thỏa $\sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}}$. Chứng minh rằng tam giác ABC cân tại A.
2. Cho tam giác ABC thỏa : $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$

Chứng minh rằng tam giác ABC là đều (kí hiệu a, b, c là độ dài các cạnh BC, CA, AB tương ứng).

Câu IV :

1. Giải phương trình : $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4$
2. Cho $y = (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} - 8[(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x]$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của y .

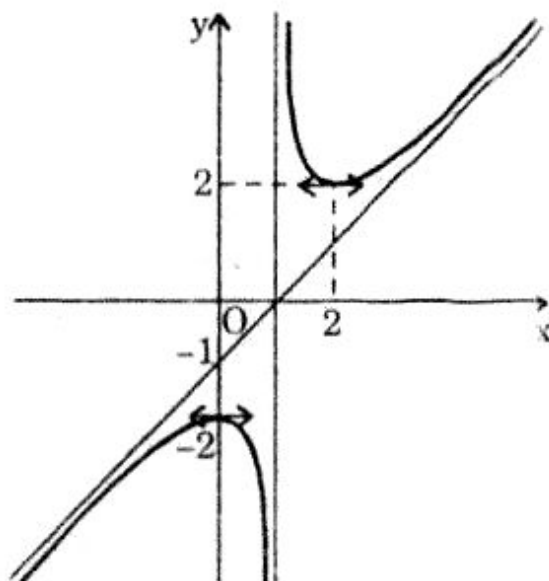
Câu V :

Trong khoảng thời gian với hệ tọa độ trục chuẩn Oxyz, cho đường thẳng D xác định bởi hệ phương trình :

Tiệm cận đứng : $x = 1$

Tiệm cận xiên : $y = x - 1$

Đồ thị :



2. Tiệm cận xiên Δ :

$$y = ax + 1 - 2a$$

$$M_o(x_o, y_o) \in \Delta, \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow y_o = ax + 1 - 2a, \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow a(x_o - 2) + 1 - y_o = 0, \quad \forall a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_o - 2 = 0 \\ 1 - y_o = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_o = 2 \\ y_o = 1 \end{cases}$$

Vậy Δ luôn đi qua điểm cố định $M_o(2, 1)$.

Câu II :

1. Giải phương trình : $\frac{(3 + 2 \sin x) \cos x - (1 + \cos^2 x)}{1 + \sin 2x} = 1 \quad (\text{I})$

Điều kiện : $1 + \sin 2x \neq 0$

$$(1) \Leftrightarrow 3 \cos x + 2 \sin 2x - 1 - \cos^2 x = 1 + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 2 \text{ (loại)} \\ \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

2. Giải bất phương trình: $\frac{\log_2(x^2 - 9x + 8)}{\log_2(3 - x)} < 2 \quad (\text{II})$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} x^2 - 9x + 8 > 0 \\ 3 - x > 0 \\ 3 - x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \vee x > 8 \\ x < 3 \\ x \neq 2 \end{cases} \\ \Leftrightarrow x < 1$$

$$\text{Khi đó ta có : } 3 - x > 2 > 1 \Rightarrow \log_2(3 - x) > 0$$

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(x^2 - 9x + 8) < 2\log_2(3 - x)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 8 < (3 - x)^2 \Leftrightarrow 3x + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow x > -\frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy nghiệm của bất phương trình là : } -\frac{1}{3} < x < 1.$$

Câu III :

$$1. \text{ Cho : } \sin \frac{A}{2} = \frac{a}{2\sqrt{bc}} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 \frac{A}{2} = \frac{a^2}{4bc} \Leftrightarrow \frac{1 - \cos A}{2} = \frac{a^2}{4bc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{2} = \frac{a^2}{4bc}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + 2bc - b^2 - c^2}{4bc} = \frac{a^2}{4bc}$$

$$\Leftrightarrow (b - c)^2 = 0 \Leftrightarrow b = c$$

$$2. \quad \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} = \frac{\sqrt{ab}}{4c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos A)(1 - \cos B)}{4} = \frac{ab}{16c^2}$$

$$\Leftrightarrow [a^2 - (b - c)^2] [b^2 - (a - c)^2] = a^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b - c)^2 = 0 \\ (a - c)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = c \\ a = c \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC \text{ đều}$$

Câu IV :

$$1. \quad (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4 \quad (1)$$

Đặt : $t = (2 + \sqrt{3})^x > 0$

$$(1) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 4 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2. \quad y = (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} - 8[(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x]$$

Đặt : $t = (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x$

$$\Rightarrow (2 + \sqrt{3})^{2x} + (2 - \sqrt{3})^{2x} = t^2 - 2$$

Ta có : $t \geq 2$

$$y = t^2 - 8t - 2 \Rightarrow y' = 2t - 8$$

$$y' = 0 \Rightarrow t = 4$$

t	2	4	$+\infty$
y'	-	0	+
y		-18	

Vậy : $y_{\min} = -18.$

Câu V :

$$D \begin{cases} x - z \sin \alpha + \cos \alpha = 0 & (\alpha) \\ y - z \cos \alpha - \sin \alpha = 0 & (\beta) \end{cases}$$

$$1. \quad \vec{n}_\alpha = (1; 0; -\sin \alpha)$$

$$\vec{n}_\beta = (0, 1; -\cos \alpha)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_D = (\sin \alpha, \cos \alpha, 1)$$

$$2. \quad \vec{e}_3 = (0; 0; 1)$$

$$\cos(\vec{a}_D, \vec{e}_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow (D, Oz) = \frac{\pi}{4}.$$

2. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình sau có nghiệm :

$$x^2 + 2|x - m| + m^2 + m - 1 \leq 0$$

Câu III :

Cho phương trình :
$$\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m \operatorname{tg} 2x \quad (1)$$

1. Giải (1) khi $m = \frac{1}{8}$.

2. Với giá trị nào của m thì (1) có nghiệm.

Câu IV :

1. Trong hệ trục tọa độ trục chuẩn Oxyz cho hai đường thẳng :

$$(d_1) : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

$$(d_2) = \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

Hãy viết phương trình đường vuông góc chung của (d_1) và (d_2) .

2. Tính các tích phân sau :

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2x dx$

b) $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3} dx$

Câu V :

Cho hai đường thẳng (Δ) , (Δ') chéo nhau, nhận AA' làm đường vuông góc chung. Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với (Δ') , và (d) là hình chiếu của (Δ) lên (P) . Đặt $AA' = a$, góc nhọn giữa (Δ) và (d) là α . Mặt phẳng Q song song với (P) cắt (Δ) và (Δ') theo thứ tự tại M và M' . Gọi M' là hình chiếu của M lên (P) .

1. Chứng minh rằng 5 điểm A , A' , M , M' và M , cùng nằm trên một mặt cầu (S) . Xác định tâm O của (S) . Tính bán kính của (S) theo a và theo khoảng cách x giữa các mặt (P) và (Q) .

2. Khi x thay đổi, hãy tìm quỹ tích tâm O của mặt cầu (S) . Chứng minh rằng khi x thay đổi, mặt cầu (S) luôn đi qua một đường tròn cố định.

Giải

Câu 1:

$$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1 \quad (C_m)$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = 3$

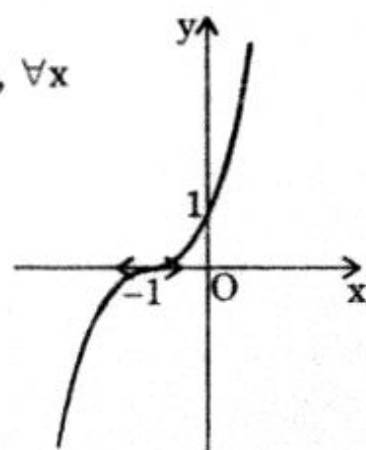
Khi $m = 3 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x+1)^2 \geq 0, \forall x$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f'		$+$ 0 $+$	
f			

$-\infty \rightarrow 0 \rightarrow +\infty$



Đồ thị : (hình)

2. (L) : $y = x^3 + 2x^2 + 7$

Phương trình hoành độ giao điểm là :

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = x^3 + 2x^2 + 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 + mx - 6 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = m^2 + 24 > 0, \quad \forall m$$

Vậy (C_m) cắt (L) tại 2 điểm $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$.

Theo Viét ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = -6 \end{cases}$$

Gọi I là trung điểm của AB ta có :

$$I \begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{m}{2} \\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{(x_1^3 + x_2^3) + 2(x_1^3 + x_2^3) + 14}{2} \end{cases}$$

$$I \quad \begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = \frac{1}{2}[-m(m^2 + 18) + 2m^2 + 38] \end{cases} \quad (1)$$

(2)

$$(1) \Rightarrow m = -2x$$

$$(2) \Rightarrow y = \frac{1}{2}[2x(4x^2 + 18)8x^2 + 38]$$

$$\Rightarrow y = 4x^3 + 4x^2 + 18x + 19$$

Vậy : quỹ tích trung điểm I của AB là đường :

$$y = 4x^3 + 4x^2 + 18x + 19$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y = 1$.

$$x^3 + 3x^2 + mx + 1 = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + 3x + m) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 3x + m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(C_m) cắt $y = 1$ tại 3 điểm phân biệt C(0; 1), D, E.

$\Leftrightarrow$ (2) có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 9 - 4m > 0 \\ 0^2 + 3 \cdot 0 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{4} \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Theo Viet ta có : $\begin{cases} x_D + x_E = -3 \\ x_D \cdot x_E = m \end{cases}$

Tiếp tuyến tại D và E vuông góc.

$$\Leftrightarrow f'(x_D) f'(x_E) = -1 \Leftrightarrow 4m^2 - 9m = -1$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 9m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{8}$$

Câu II :

1. Giải và biện luận theo a hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{1}{x-2y} + x + 2y = 5 \\ \frac{x+2y}{x-2y} = a \end{cases}$$

Đặt : $u = \frac{1}{x-2y} \neq 0; \quad v = x + 2y$

Ta có : $\begin{cases} u + v = 5 \\ u \cdot v = a \end{cases}$

u, v là nghiệm của phương trình : $X^2 - 5X + a = 0$ (1)

ĐK : $\Delta = 25 - 4a \geq 0 \Leftrightarrow a \leq \frac{25}{4}$

TH 1 : $a \leq \frac{25}{4}$ và $a \neq 0$

Ta chọn : $\begin{cases} u = X_1 \\ v = X_2 \end{cases}$ hay $\begin{cases} u = X_2 \\ v = X_1 \end{cases}$

Với X_1, X_2 là nghiệm của phương trình (1)

TH 2 : $a = 0$

$X_1 = 0, X_2 = 5$

Ta chọn : $\begin{cases} u = X_2 = 5 \\ v = X_1 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x + 2y = v \\ x - 2y = \frac{1}{u} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \left(v + \frac{1}{u} \right) \\ y = \frac{1}{4} \left(v - \frac{1}{u} \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = -\frac{1}{20} \end{cases}$$

2. Với giá trị nào của tham số m thì bất phương trình sau có nghiệm :

$$x^2 + 2|x - m| + m^2 + m - 1 \leq 0 \quad (1)$$

Đặt : $t = x - m$

Ta có : (1) $\Leftrightarrow t^2 + 2(mt + |t|) + 2m^2 + m - 1 \leq 0$ (2)

Đặt : $f(t) = t^2 + 2(mt + |t|) + 2m^2 + m - 1$

(1) có nghiệm $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $\Leftrightarrow \min f(t) \leq 0$

TH 1 : $\begin{cases} t \geq 0 \\ f(t) = t^2 + 2(m+1)t + 2m^2 + m - 1 \leq 0 \end{cases}$

Ta có : $f'(t) = 2t + 2(m+1) \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -(m+1)$

* Nếu $-(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow m \geq -1$, ta có : $\begin{cases} \min f(t) = f(0) \\ t \geq 0 \end{cases}$

$f(0) \leq 0 \Leftrightarrow 2m^2 + m - 1 \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq \frac{1}{2}$ (thỏa mãn $m \geq -1$)

* Nếu $-(m+1) > 0 \Leftrightarrow m < -1$, ta có : $\begin{cases} \min f(t) = f(-m-1) \\ t \geq 0 \end{cases}$

$f(-m-1) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0$

$\Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$ (loại)

TH 2 : $\begin{cases} t < 0 \\ f(t) = t^2 + 2(m-1)t + 2m^2 + m - 1 \end{cases}$

làm tương tự ta được : $\begin{cases} \min f(t) \leq 0 \\ t < 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2} \end{cases}$

Kết luận : $-1 \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu III :

$$\frac{\cos^6 x + \sin^6 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = 2m \operatorname{tg} 2x \quad 1)$$

1. Giải (1) khi $m = \frac{1}{8}$ (xem câu 2).

2. Với giá trị nào của m thì (1) có nghiệm.

$$\text{Ta có : (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ 3 \sin^2 2x + 8m \sin 2x - 4 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Đặt : $t = \sin 2x$ ($-1 < t < 1$)

$$(2) \Leftrightarrow 8m = \frac{-3t^2 + 4}{t}$$

$$\text{Đặt : } f(t) = \frac{-3t^2 + 4}{t}$$

$$f'(t) = \frac{-3t^2 + 4}{t^2} < 0$$

Bảng biến thiên :

t	-1	0	1
f'	-		-
f	-1 $\rightarrow$ $-\infty$	$+\infty \rightarrow$	1

$$(1) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m < -1 \\ 8m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{8} \\ m > \frac{1}{8} \end{cases}$$

Vậy với $m = \frac{1}{8}$ phương trình vô nghiệm.

Câu IV :

$$1. \quad (d_1) : \frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-9}{-1}$$

$$(d_2) : \frac{x-3}{-7} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$$

Ta có : $\vec{a}_{d_1} = (1; 2; -1)$

$\vec{a}_{d_2} = (-7; 2; 3)$

Gọi Δ là đường vuông góc chung của d_1 và d_2 , ta có :

$$\begin{cases} \vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_{d_1} \\ \vec{a}_\Delta \perp \vec{a}_{d_2} \end{cases} \Rightarrow \vec{a}_\Delta = (-8; -4; -16) \Rightarrow \vec{a}_\Delta = (2; 1; 4)$$

Gọi (α) là mặt phẳng chứa d_1 và cùng phương với $\vec{a}_\Delta$, ta có :

$$\vec{n}_\alpha = (3; -2; -1)$$

Chọn : $A(7; 3; 9) \in d_1$

Phương trình của (α) là : $3(x - 7) - 2(y - 3) - (z - 9) = 0$

$$\Leftrightarrow 3x - 2y - z - 6 = 0$$

Tương tự, gọi β là mặt phẳng chứa d_2 và cùng phương với $\vec{a}_\Delta$, ta có : $(\beta) : 5x + 34y - 11z - 38 = 0$

Vậy phương trình của Δ là :

$$\begin{cases} 3x - 2y - z - 6 = 0 & (\alpha) \\ 5x + 34y - 11z - 38 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

2. a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 2x dx$

Ta có : $\cos^4 2x = \left(\frac{1 + \cos 4x}{2} \right)^2$

$$= \frac{1}{4} [1 + 2\cos 4x + \cos^2 4x]$$

$$= \frac{1}{4} \left[1 + 2\cos 4x + \frac{1 + \cos 8x}{2} \right]$$

$$= \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 8x$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 4x + \frac{1}{8} \cos 8x \right) dx$$

2. Quỹ tích tâm O là đường thẳng (L) đi qua trung điểm I của AA' và song song với Δ .

Khi x thay đổi mặt cầu (S) luôn đi qua đường tròn (C) đường kính AA' nằm trong mặt phẳng (Q) vuông góc với (L) tại I.

Đề 13

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1}$ (m là tham số)

1. Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số tương ứng với $m = 1$.
2. Chứng minh rằng nếu đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại $x = x_0$ thì $y'(x_0) = \frac{2(x_0 + m)}{x_0 - 1}$.
3. Tìm số a nhỏ nhất để $a(x^2 + x - 1) \leq (x^2 + x + 1)^2$ được thỏa mãn với mọi $x \in [0; 1]$.

Câu II :

1. Giải phương trình : $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3} \sin 3x$.
2. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình :

$$\sqrt{(\sqrt{2} + x)^m} + \sqrt{(\sqrt{2} - x)^m} = 2\sqrt{2}$$

là hệ quả của phương trình : $\frac{\log_2(9 - x^3)}{\log_2(3 - x)} = 3$

Câu III :

Cho biết phương trình : $\sqrt{(a + 2)x - a} \geq |x + 1|$.

1. Giải bất phương trình (1) khi $a = 1$.
2. Tìm tất cả các giá trị a để (1) có nghiệm x thỏa điều kiện $0 \leq x \leq 2$.

Câu IV :

Cho tứ diện với bốn đỉnh $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$.

1. Tính độ dài đường cao hạ từ đỉnh D xuống mặt phẳng (ABC) .
2. Viết phương trình tham số của đường cao nói trên. Tìm tọa độ hình chiếu của D trên mặt phẳng (ABC) .

Câu V :

Tính tích phân :
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 3}$$

Câu VI :

Trong mặt phẳng (O) cho đường tròn (C) tâm O , đường kính $AB = 2R$. Lấy điểm S thuộc đường thẳng vuông góc với (P) tại O sao cho $OS = R\sqrt{3}$. I là điểm thuộc đoạn SO với $SI = \frac{2R}{\sqrt{3}}$. M là điểm thuộc (C) .

1. Tính tỉ số $\frac{SH}{SM}$, với H là hình chiếu của I trên SM . Từ đó suy ra quỹ tích của H khi M di động trên (C) .
2. Xác định vị trí của M trên (C) để hình chóp $HAMB$ có thể tích lớn nhất. Tính giá trị lớn nhất này.
3. Tính góc phẳng của nhị diện cạnh SB tạo bởi mặt phẳng (SAB) và (SMB) khi góc $\widehat{BAM} = \frac{\pi}{6}$.

Giải**Câu I :**

Cho hàm số :
$$y = \frac{x^2 + 2mx + 1}{x - 1}$$

1. $m = 1$

Ta có :
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x - 1}$$

TXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1		1		3		$+\infty$
f'(x)		+	0	-		-	0	+
f(x)			$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$	
	$-\infty$		0	$-\infty$		$+\infty$	5	$+\infty$

Đồ thị : (học sinh tự vẽ).

2. $y = \frac{u(x)}{v(x)}$

Ta có : $u(x_0) = 0$

$$y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\Rightarrow y'(x_0) = \frac{u'(x_0)}{v(x_0)} = \frac{2(x_0 + m)}{x_0 - 1}$$

3. $a(x^2 + x - 1) \leq (x^2 + x + 1)^2 \quad \forall x \in [0, 1] \quad (1)$

Đặt : $X = x^2 + x$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq X \leq 2$$

$$(1) \Leftrightarrow a(X - 1) \leq (X + 1)^2 \quad (2)$$

TH 1 : $X = 1$, ta có (2) đúng $\forall a$

TH 2 : $0 \leq X \leq 1$

$$(2) \Leftrightarrow a \geq \frac{(X + 1)^2}{X - 1} \Leftrightarrow a \geq -1$$

TH 3 : $1 < X \leq 2$

$$(2) \Leftrightarrow a \leq \frac{(X + 1)^2}{X - 1} \Leftrightarrow a \leq 9$$

Vậy bất phương trình thỏa mãn với $\forall x \in [0, 1]$ khi $-1 \leq a \leq 9$.

$\Rightarrow$ Số a nhỏ nhất thỏa mãn bài toán là : $a = -1$

Câu II :

1. Giải phương trình : $|\cos 3x| = 1 - \sqrt{3} \sin 3x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \cos^2 3x = 1 - 2\sqrt{3} \sin 3x + 3 \sin^2 3x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 4 \sin^2 3x - 2\sqrt{3} \sin 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow 3x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$2. \quad \frac{\log_2(9 - x^3)}{\log_2(3 - x)} = 3 \quad (1)$$

Điều kiện : $\begin{cases} x < \sqrt[3]{9} \\ x \neq 2 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow 9 - x^3 = (3 - x)^3 \Leftrightarrow 9x^2 - 17x + 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

Ta phải tìm m thỏa :

$$\sqrt{(\sqrt{2} + 1)^m} + \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^m} = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

Đặt : $t = (\sqrt{2} + 1)^{\frac{m}{2}}$

$$(2) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} + 1 \\ t = \sqrt{2} - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -2 \end{cases}$$

Câu III :

$$\sqrt{(a+2)x - a} \geq |x+1| \quad (1)$$

1. $a = 1$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x-1} \geq |x+1| &\Leftrightarrow 3x-1 \geq x^2+2x+1 \\ &\Leftrightarrow x^2-x+2 \leq 0 \text{ vô nghiệm} \end{aligned}$$

2. Tìm (a) để (1) có nghiệm thỏa : $0 \leq x \leq 2$

$$(1) \Leftrightarrow (a+2)x - a \geq x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 1 \leq a(x-1) \quad (2)$$

TH 1 : $0 \leq x \leq 1$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x-1} \geq a$$

TH 2 : $1 < x \leq 2$

$$(2) \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x-1} \leq a$$

Đặt : $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

x	0	1	2
f'		-	-
f	-1	$-\infty$	$+\infty$

Vậy : $a \leq -1$ hay $a \geq 5$.

Câu IV :

$$A(0; 0; 2), \quad B(3; 0; 5), \quad C(1; 1; 0), \quad D(4; 1; 2)$$

1. Ta viết phương trình mặt phẳng (ABC) (gọi là mặt phẳng α)

$$\vec{AB} = (3; 0; 3); \quad \vec{AC} = (1; 1; -2)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_\alpha = (1; -3; -1)$$

$$\Rightarrow (\alpha) : x - 3y - (z - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - z + 2 = 0$$

$$DH = d(D, \alpha) = \frac{|4 - 3 - 2 + 2|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{\sqrt{11}}{11}$$

2. Phương trình tham số của DH

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2 - t \end{cases}$$

Đặt H là hình chiếu của D lên mặt phẳng α , ta có $H \in (\alpha)$

$$\Rightarrow (4 + t) - 3(1 - 3t) - (2 - t) + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{11}$$

Vậy : $H \begin{cases} x = 4 - \frac{1}{11} = \frac{43}{11} \\ y = 1 + \frac{3}{11} = \frac{14}{11} \\ z = 2 + \frac{1}{11} = \frac{23}{11} \end{cases}$

$$H \left(\frac{43}{11}, \frac{14}{11}, \frac{23}{11} \right).$$

Câu V :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\cos^2 x + 3} dx$$

Đặt $u = \cos x ; du = -\sin x dx$

Đổi cận :	x	0	$\frac{\pi}{2}$
	u	1	0

$$I = - \int_1^0 \frac{du}{u^2 + 3} = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctgu \Big|_0^1 = \frac{\pi\sqrt{3}}{12}$$

Câu II :

Cho bất phương trình : $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$

1. Giải bất phương trình với $m = \frac{1}{2}$.
2. Với giá trị nào của m thì bất phương trình có nghiệm ?

Câu III :

1. Giải phương trình : $\frac{\cos x(2 \sin x + 3\sqrt{2}) - 2 \cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1.$

2. Trong tam giác ABC biết : $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{1}{3}.$

Chứng tỏ rằng : $c = \frac{a+b}{2}.$

Câu IV :

Cho elip có phương trình : $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$

Xét một hình vuông ngoại tiếp elip (tức là các cạnh của hình vuông đều tiếp xúc với elip). Viết phương trình các đường thẳng chứa các cạnh của hình vuông đó.

Câu V :

Cho hình vuông ABCD cạnh a trong mặt phẳng P . Hai điểm MN lần lượt di động trên hai cạnh CB và CD . Đặt $CM = x$ và $CN = y$. Trên đường thẳng At vuông góc với P , lấy điểm S . Tìm liên hệ giữa x và y để :

1. Các mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau góc 45° .
2. Các mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Giải

Câu I :

$$y = 4x^3 + mx$$

1. Tùy theo giá trị của m , hãy xét sự biến thiên của hàm số

TXĐ : $D = \mathbb{R}$

$$y' = 12x^2 + m$$

TH 1 : $m \geq 0 \Rightarrow y' \geq 0$

Hàm số luôn đồng biến.

TH 2 : $m < 0$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{-m}{12}}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{-m}{12}}$	$\sqrt{\frac{-m}{12}}$	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

2. Xác định m để $|y| \leq 1$ khi $|x| \leq 1$

Cho : $x = 1$

Ta có : $4 + m \leq 1 \Rightarrow m \leq -3$ (1)

Cho : $x = \frac{1}{2}$

Ta có : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}m \leq 1 \Rightarrow m \geq -3$ (2)

(1), (2) $\Rightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq -3 \end{cases} \Rightarrow m = -3$

Đảo lại, giả sử $m = -3$

$$y = 4x^3 - 3x, \quad \forall x \in [-1; 1]$$

Đặt : $x = \cos \alpha$

$$\Rightarrow y = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha = \cos 3\alpha$$

$$\Rightarrow |y| = |\cos 3\alpha| \leq 1$$

Câu II :

Cho bất phương trình : $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$ (1)

1. Giải bất phương trình với $m = \frac{1}{2}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \sqrt{x-3} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - 3 \leq 2\sqrt{x-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ (x-3)^2 \leq 4(x-3) \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7$$

2. Tìm m để bất phương trình có nghiệm.

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{x-3} \geq 0 \Rightarrow x = t^2 + 3$$

$$(1) \Leftrightarrow mt^2 - t + 2m - 1 \leq 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ có nghiệm } x \Leftrightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \geq 0$$

TH 1 : $m = 0$

$$(2) \Leftrightarrow -t - 1 \leq 0 \text{ đúng } \forall t \geq 0$$

TH 2 : $m < 0$

$$\text{Đặt : } f(t) = mt^2 - t + 2m - 1$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty \Rightarrow (2) \text{ có nghiệm } t \geq 0$$

TH 3 : $m > 0$

$$\text{Ta có : } \Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}$$

t	$-\infty$	t_1	t_2	$+\infty$	
f(t)	+	0	-	0	+

$$t_1 + t_2 = \frac{1}{m} > 0 \Rightarrow t_2 > 0$$

$$\Rightarrow (2) \text{ có nghiệm : } t \geq 0.$$

$$\text{Vậy (1) có nghiệm khi : } m \leq \frac{1+\sqrt{3}}{4}.$$

Câu III :

$$1. \text{ Giải phương trình : } \frac{\cos x(2 \sin x + 3\sqrt{2}) - 2 \cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1 \quad (1)$$

Điều kiện : $\sin 2x \neq -1$

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 3\sqrt{2}\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Theo điều kiện ta chỉ nhận nghiệm : $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Cho tam giác ABC biết : $\operatorname{tg}\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{B}{2}\right) = \frac{1}{3}$ (1)

Chúng tỏ rằng : $c = \frac{a+b}{2}$.

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 3\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} = \cos \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} = \cos \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \sin \frac{A+B}{2} \cdot \cos \frac{A-B}{2} = 2\sin \left(\frac{A+B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{A+B}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) = \sin(A+B)$$

$$\Leftrightarrow \sin C = \frac{1}{2}(\sin A + \sin B) \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}(a+b).$$

Câu IV :

$$(E) : \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$$

Gọi Δ là một cạnh hình vuông.

$$\Delta : Ax + By + C = 0$$

$$\Delta \text{ tiếp xúc với } (E) \Leftrightarrow 6A^2 + 3B^2 = C^2$$

Gọi Δ' là cạnh vuông góc với Δ :

$$\Delta' : Bx - Ay + C' = 0$$

$$\Delta' \text{ tiếp xúc với } (E) \Leftrightarrow 6B^2 + 3A^2 = C'^2$$

Ta có : $d(O, \Delta) = d(O, \Delta')$

$$\Rightarrow |C| = |C'| \Rightarrow 6A^2 + 3B^2 = 6B^2 + 3A^2 \Rightarrow A^2 = B^2$$

$$\text{Cho : } A = 1 \Rightarrow \begin{cases} B = \pm 1 \\ C = \pm 3 \\ C' = \pm 3 \end{cases}$$

Vậy phương trình 4 cạnh của hình vuông là :

$$x + y + 3 = 0 ; \quad x - y + 3 = 0$$

$$x + y - 3 = 0 ; \quad x - y - 3 = 0$$

Câu V :

$$1. \quad (\widehat{SAM, SAN}) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \widehat{MAN} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow (\alpha + \beta) = \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$\Leftrightarrow \frac{a-x}{a} + \frac{a-y}{a} = 1 - \frac{(a-x)(1-y)}{a^2}$$

$$\Leftrightarrow a(2a - x - y) = a^2 - (a-x)(a-y)$$

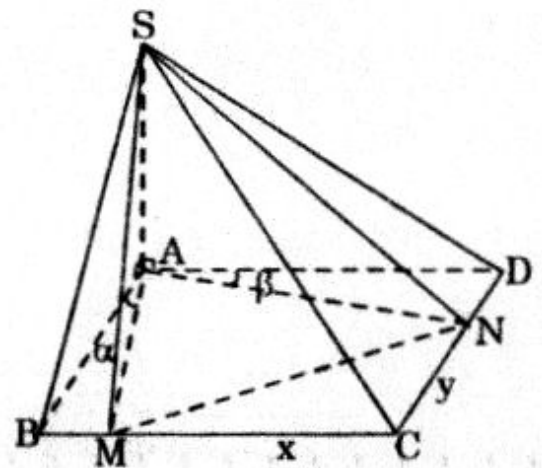
$$\Leftrightarrow a(x+y) - (a-x)(a-y) = a^2$$

$$2. \quad (\widehat{SAM, SMN}) = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow (\widehat{SAM}) \perp (\widehat{SMN}) \Leftrightarrow MN \perp AM \Leftrightarrow AM^2 + MN^2 = AN^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + (a-x)^2 + x^2 + y^2 = a^2 + (a-y)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 = a(x-y).$$



Đề 15

Câu I :

1. Cho hàm số : $y = x + \sqrt{1 - x^2} - m$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số nhận giá trị không dương với mọi $x \in [-1; 1]$.
2. Trong hệ trục tọa độ xOy , hãy vẽ tất cả các điểm $M(x, y)$ có tọa độ thỏa điều kiện :

$$|y| \geq \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$$

3. Cho hàm số $y = x^4 + (m + 3)x^2 + 2(m + 1)x^2$. Tìm m để hàm số có cực đại. Khi đó chứng tỏ rằng điểm cực đại của đồ thị hàm số không có hoành độ dương.

Câu II :

1. Cho a, b, c, d là 4 số dương, chứng minh :

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

2. Cho hệ phương trình :
$$\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

Tìm m để hệ có 3 nghiệm : $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ với x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng và trong 3 số, hai số có trị tuyệt đối lớn hơn 1.

Câu III :

Cho tam giác ABC có các cạnh $AC = b, BC = a, AB = c$. Đường tròn nội tiếp của tam giác ABC tiếp xúc với các cạnh ở A', B', C' (đối diện với các đỉnh A, B, C). Tam giác $A'B'C'$ có cạnh $A'C' = b', B'C' = a', A'B' = c'$. Chứng minh rằng :

$$\frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2\sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)$$

Câu IV :

1. a) Chứng tỏ rằng hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

là một nguyên hàm của hàm số :

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

b) Với hàm số $y = f(x)$ ở trên, hãy tính diện tích hình chắn bởi đồ thị $y = f(x)$ và đoạn $[0, 1]$ của trục hoành Ox.

2. Hãy xác định góc nhọn bởi đường thẳng :

$$\begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 \\ 3x + 7y - 2z = 0 \end{cases}$$

với mặt phẳng : $3x + y - z + 1 = 0$.

Câu V :

Trong mặt phẳng (P) cho một đường thẳng (d) và một điểm A ngoài (d). Một góc $\widehat{xAy}$ di động quay quanh A, cắt (d) tại B và C. Trên đường thẳng qua A và vuông góc với (P) lấy điểm S. Gọi H và K là các hình chiếu vuông góc của A trên SB và SC.

1. Chứng minh A, B, C, H, K thuộc cùng một mặt cầu.
2. Tính bán kính mặt cầu trên biết $AB = 2$, $AC = 3$, $\widehat{BAC} = 60^\circ$.
3. Giả sử tam giác ABC vuông tại A, Chứng minh rằng mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK luôn đi qua một đường tròn cố định khi S thay đổi.

Giải

Câu I :

1. Cho hàm số : $y = x + \sqrt{1 - x^2} - m$.

Tất cả các giá trị của m để hàm số nhận giá trị không dương
 $\forall x \in [-1; 1]$

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Bảng biến thiên :

x	-1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
f'		+	0
f		$\sqrt{2} - m$	

$$f(x) \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} - m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \sqrt{2}$$

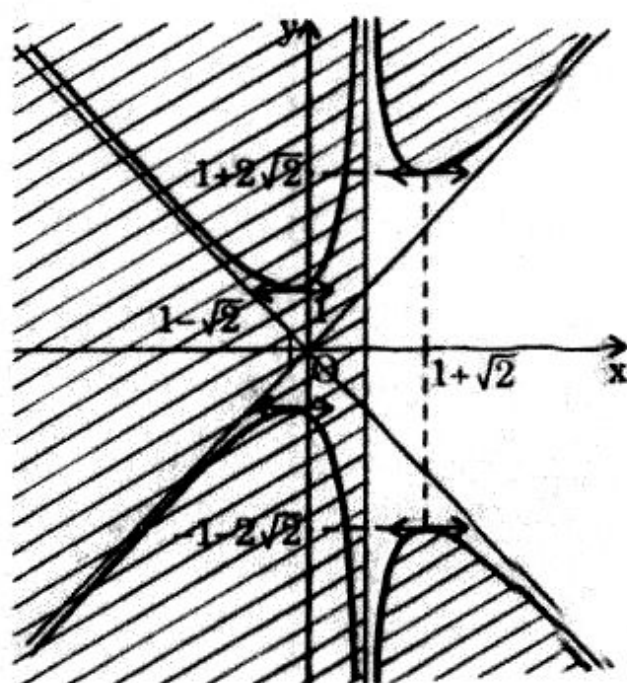
2. $|y| \geq \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

Đặt : $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x - 1}$

Ta có : $|y| \geq f(x)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ y \geq f(x) \end{cases} \vee \begin{cases} y \leq 0 \\ y \leq -f(x) \end{cases}$$

Tập hợp những điểm $M(x, y)$ thỏa điều kiện $|y| \geq f(x)$ là phần gạch chéo dưới đây của mặt phẳng tọa độ.



3. $y = f(x) = x^4 + (m + 3)x^3 + 2(m + 1)x^2$.

$$f'(x) = 4x^3 + 3(m + 3)x^2 + 4(m + 1)x$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 + 3(m + 3)x + 4(m + 1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$f(x)$ có cực đại $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm khác 0.

Đặt : $g(x) = 4x^2 + 3(m + 3)x + 4(m + 1)$

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 9(m + 3)^2 - 64(m + 1) > 0$$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 10m + 17 > 0 \quad \text{đúng } \forall m$$

$\Rightarrow$ với $\forall m$ hàm số luôn có cực đại

$$g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq -1$$

Vậy : $m \neq -1$.

$g(x)$ luôn có hai nghiệm x_1, x_2 :

$$g(0) = 4(m + 1)$$

$$\frac{S}{2} = -\frac{3}{2}(m + 3)$$

$$TH 1 : g(0) < 0 \Leftrightarrow m < -1 \Rightarrow x_1 < 0 < x_2$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
f		-	0	+	0	-	0	+
f_{CB}		$\searrow$	CT	$\nearrow$	CB	$\searrow$	CT	$\nearrow$

$$TH 2 : g(0) > 0 \Leftrightarrow m > -1 \Rightarrow \frac{S}{2} - 0 = -\frac{3}{2}(m + 3) \Rightarrow x_1 < x_2 < 0$$

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$
f	-	0	+	0	+
f_{CB}	$\searrow$ CT $\rightarrow$ CB $\rightarrow$ CT $\searrow$				

Vậy điểm cực đại của đồ thị hàm số không có hoành độ dương.

Câu II :

1. Cho $a, b, c, d > 0$

Chứng minh rằng :

$$1 < \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b} < 2$$

Đặt : $M = a + b + c + d$

Ta có : $\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}$

$$> \frac{a}{M} + \frac{b}{M} + \frac{c}{M} + \frac{d}{M} = \frac{M}{M} = 1$$

Ta có : $\frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{b+c+d} + \frac{c}{c+d+a} + \frac{d}{d+a+b}$

$$< \frac{a}{a+c} + \frac{b}{b+d} + \frac{c}{c+a} + \frac{d}{d+b} = 2 \quad (\text{dpcm}).$$

2.

$$\begin{cases} x^3 - y^3 = m(x - y) \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - y)(x^2 + xy + y^2 - m) = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (2) \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = -1 \end{cases} \quad \vee \quad (3) \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - m = 0 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -\frac{1}{2} \\ y_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy + y^2 - m = 0 \\ y = -1 - x \end{cases} \Leftrightarrow x^2 + x + 1 - m = 0 \quad (4)$$

Để hệ có 3 nghiệm $\Rightarrow (4)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_3

$$\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4(1 - m) = 4m - 3 > 0 \quad \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$$

Lúc đó ta có : $x_1 + x_3 = \frac{S}{2} = -\frac{1}{2} = x_2$

Vậy : nếu (4) có 2 nghiệm x_1, x_3 thì ta có x_1, x_2, x_3 lập thành một cấp số cộng.

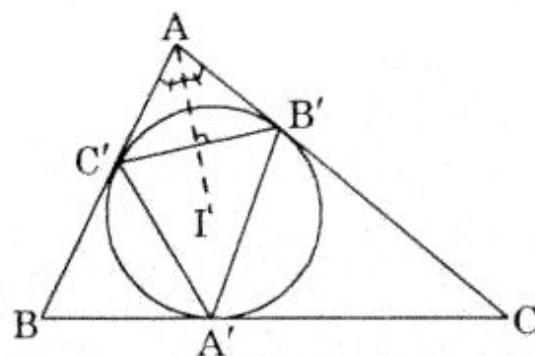
Để thỏa : $x_1 < -1 < 1 < x_2$

$$\text{Ta phải có : } \begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m < 0 \\ 3 - m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 3$$

Vậy : $m > 3$.

Câu III :

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \frac{a'}{a} &= \frac{2(p-a) \sin \frac{A}{2}}{a} \\ &= \frac{b+c-a}{a} \sin \frac{A}{2} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \frac{(\sin B + \sin C - \sin A) \sin \frac{A}{2}}{\sin A} \\ &= \frac{2 \cos \frac{A}{2} \left(\cos \frac{B-C}{2} - \cos \frac{B+C}{2} \right) \sin \frac{A}{2}}{\sin A} \\ &= 2 \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \end{aligned}$$

$$\text{Tương tự : } \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a'}{a} + \frac{b'}{b} = 2 \sin \frac{C}{2} \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} \right)$$

Câu IV :

$$1. \text{ a) } F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$$

TH 1 : $x > 0$

$$F'(x) = x \ln x + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = x \ln x = f(x)$$

TH 2 : $x = 0$

$$\begin{aligned} F'(0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(0 + \Delta x) - F(0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta x^2}{2} \ln \Delta x - \frac{\Delta x^2}{4}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \Delta x \cdot \ln \Delta x = 0 = f(0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow F'(x) = f(x) \quad \forall x \geq 0$$

Vậy : $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

$$b) \quad S = \int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 |-f(x)| dx = -F(x) \Big|_0^1$$

$$S = \frac{1}{4} \text{ (đvdt)}$$

2.

$$(d) : \begin{cases} x + 4y - 2z + 7 = 0 & (\beta) \\ 3x + 7y - 2z = 0 & (\lambda) \end{cases}$$

$$(\alpha) : 3x + y - z + 1 = 0$$

$$\text{Ta có : } \vec{n}_\beta = (1; 4; -2) \quad ; \quad \vec{n}_\gamma = (3; 7; -2)$$

$$\Rightarrow \vec{a}_d = (6; -4; -5) \quad ; \quad \vec{n}_\alpha = (3; 1; -1)$$

$$\sin(d, \alpha) = |\cos(\vec{a}_d, \vec{n}_\alpha)| = \frac{|\vec{a}_d \cdot \vec{n}_\alpha|}{|\vec{a}_d| \cdot |\vec{n}_\alpha|}$$

$$= \frac{|18 - 4 + 5|}{\sqrt{36 + 16 + 25} \cdot \sqrt{9 + 1 + 1}} = \frac{19}{11\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \widehat{(d, \alpha)} = \arcsin\left(\frac{19}{11\sqrt{7}}\right).$$

Câu V :

1. Gọi AD là đường kính của vòng tròn ngoại tiếp ΔABC , ta có :

$$\widehat{DHX} = \widehat{DKA} = 90^\circ$$

$\Rightarrow$ ABCHK cùng thuộc mặt cầu đường kính AD

2. $AD = 2R$.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$

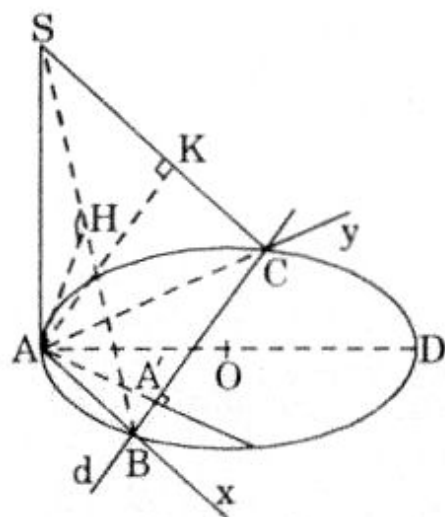
$$= 4 + 9 - 2 \times 2 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{7}$$

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R \Rightarrow R = \frac{\sqrt{21}}{3}$$

3. $\widehat{BAC} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Mặt cầu ngoại tiếp khối đa diện ABCHK có tâm lưu động trên d và đi qua A cố định nên luôn chứa đường tròn tâm A' bán kính A'A nằm trong mặt phẳng $(\alpha) \perp d$ tại A' với A' là hình chiếu của A xuống d.



Đề 16

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1+m}{-x+m}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$.
3. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, các đường cong (1) đều tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Câu II :

Giải bất phương trình : $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 > 0$.

Câu III :

Trên mặt phẳng tọa độ vuông góc Oxy cho điểm $A(3, 0)$ và Parabol (P) có phương trình $y = x^2$.

1. M là một điểm thuộc parabol (P), có hoành độ $x_M = a$. Tính độ dài đoạn AM. Xác định a để AM ngắn nhất.
2. Chứng tỏ rằng nếu đoạn AM ngắn nhất thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol (P).

Câu IV :

Cho tam giác ABC với $A \geq B \geq C$ (A, B, C là số đo các góc của tam giác ABC). Chứng minh rằng :

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b}$$

Trong đó h_a, h_b, h_c là độ dài của ba đường cao xuất phát từ các đỉnh A, B, C.

Câu V :

1. Tính tích phân : $\int_0^{\pi} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$
2. Xác định hình chiếu vuông góc của đường thẳng (D) :

$$(D) : \begin{cases} x - y + z - 5 = 0 \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

lên mặt phẳng (P) :

$$(P) : 3x - 2y - z + 15 = 0$$

Câu VI :

Cho tứ diện SABC có cạnh $SA \perp (ABC)$, nhị diện cạnh SB là nhị diện vuông, cho biết :

$$SB = a\sqrt{2}, \widehat{BSC} = 45^\circ, \widehat{ASB} = \alpha \quad (0 < \alpha < 90^\circ)$$

1. Chứng minh rằng : $BC \perp SB$. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp tứ diện SABC.

2. Tính thể tích tứ diện SABC. Với giá trị nào của α thì thể tích đó lớn nhất.
3. Xác định α để góc phẳng của nhị diện cạnh SC bằng 60° .

Giải

Câu 1 :

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{-x + m}$$

1. Khảo sát và vẽ đồ thị khi $m = 1$.

Học sinh tự vẽ.

2. Xác định m để hàm số nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$.

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x + m)^2}$$

Đặt : $g(x) = -2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1$

$$\Delta' = 4m^2 + 2(-m^2 + 2m + 1) = 2(m + 1)^2$$

TH 1 : $m = -1$

$$\Rightarrow g'(x) < 0, \quad \forall x \in D$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ nghịch biến trên } (2; +\infty)$$

TH 2 : $m \neq -1$

$g(x)$ có hai nghiệm x_1, x_2 .

Ta có bảng biến thiên :

x	$-\infty$	x_1	m	x_2	$+\infty$
f'		- 0 +		+ 0 -	
f	$+\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$-\infty$

$$\Rightarrow \text{để } f(x) \text{ nghịch biến trong } (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} ag(2) \leq 2 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 10m + 7 > 0 \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < 5 - \sqrt{18}$$

3. Gọi $M_0(x_0, y_0)$ là điểm cố định

$$M_0 \in (C_m), \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1 + m}{-x_0 + m}$$

$$\Leftrightarrow m(x_0 + y_0 - 1) - x_0 y_0 - 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 + y_0 - 1 = 0 \\ 2x_0^2 + y_0 x_0 + x_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$$

Ta có : $f'(x) = \frac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x + m)^2}$

$$f'(-1) = \frac{-m^2 - 2m - 1}{(m+1)^2} = -1 \quad [\text{vì } x_0 = -1]$$

Phương trình tiếp tuyến Δ với (C_m) tại $M_0(-1; 2)$:

$$\Delta : y = (-1)(x - 2) + 2 \Leftrightarrow y = -x + 4$$

Vậy : (C_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng cố định $\Delta : y = -x + 4$ tại điểm cố định $M_0(-1; 2)$.

Câu II :

Giải bất phương trình : $\sqrt{2x^2 - 6x + 1} - x + 2 > 0 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 - 6x + 1} > x - 2$$

$$\begin{aligned} TH 1 : \quad & \begin{cases} x - 2 < 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \\ x \geq \frac{3 + \sqrt{7}}{2} \end{cases} \\ & \Leftrightarrow x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2} \end{aligned}$$

$$TH\ 2 : \begin{cases} x - 2 \geq 0 \\ 2x^2 - 6x + 1 > (x - 2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 - 2x - 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x > 3$$

Vậy : $x \leq \frac{3 - \sqrt{7}}{2}$ và $x > 3$.

Câu III :

1. $M(a, a^2) \in (P)$

$$AM^2 = (a - 3)^2 + a^4$$

$$= a^4 + a^2 - 6a + 9$$

$$AM = \sqrt{a^4 + a^2 - 6a + 9}$$

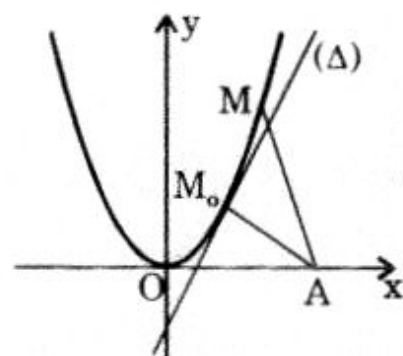
Đặt : $f(a) = a^4 + a^2 - 6a + 9$

$$\Rightarrow f'(a) = 4a^3 + 2a - 6$$

$$= (a - 1)(4a^2 + 4a + 6)$$

$$f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

a	$-\infty$	1	$+\infty$
f'	-	0	+
f	$\searrow$ min $\nearrow$		



AM ngắn nhất $\Leftrightarrow a = 1$

2. $M_0(1; 1)$

Hệ số góc AM_0 :

$$k_1 = \frac{y_{M_0} - y_A}{x_{M_0} - x_A} = \frac{1 - 0}{1 - 3} = -\frac{1}{2}$$

Hệ số góc tiếp tuyến Δ tại M_0 :

$$k_2 = 2x_{M_0} = 2$$

$$k_1 \cdot k_2 = \left(-\frac{1}{2}\right) (2) = -1 \Rightarrow AM_0 \perp \Delta$$

Vậy nếu đoạn AM ngắn nhất thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol.

Câu IV :

$$A \geq B \geq C \Rightarrow a \geq b \geq c$$

Ta chứng minh :

$$\frac{h_a}{h_b} + \frac{h_b}{h_c} + \frac{h_c}{h_a} \geq \frac{h_b}{h_a} + \frac{h_a}{h_c} + \frac{h_c}{h_b} \quad (1)$$

Ta có : $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b \Rightarrow \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$

Vậy : $(1) \Leftrightarrow \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} \geq \frac{a}{b} + \frac{c}{a} + \frac{b}{c}$

$$\Leftrightarrow b^2c + c^2a + a^2b > a^2c + c^2b + b^2a$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(b-c)(a-c) > 0 \quad (2)$$

Theo giả thiết (2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

Câu V :

1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin^3 x}{1 + \cos x} dx$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4 \sin x (1 - \cos^2 x)}{1 + \cos x} dx$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \sin x (1 - \cos x) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (4 \sin x - 2 \sin 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \left[-4 \cos x + \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\Leftrightarrow I = (-1) - (-4 + 1) = 2$$

Vậy : $I = 2$

2. (D) : $\begin{cases} x - y + z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 2x + 3y + z - 4 = 0 & (\beta) \end{cases}$

(P) : $3x - 2y - z + 15 = 0$

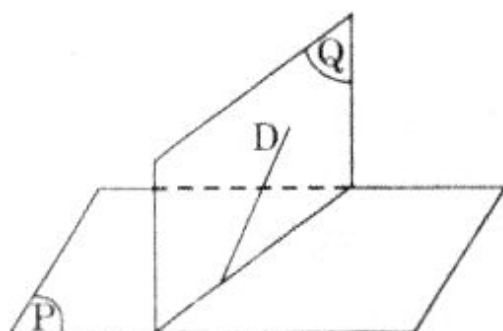
Gọi (Q) là mặt phẳng chứa (D) và vuông góc với (P).

Phương trình (Q) có dạng :

$$m(x - y + z - 5) + n(2x + 3y + z - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 2n)x + (-m + 3n)y + (m + n)z - 5m - 4n = 0$$

$$\Rightarrow \vec{n}_Q = (m + 2n, -m + 3n, m + n)$$



Ta có :

$$\vec{n}_P = (3; -2; -1)$$

$$\vec{n}_Q \perp \vec{n}_P \Leftrightarrow 3(m + 2n) - 2(-m + 3n) - (m + n) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - n = 0$$

Cho : $m = 1 \Rightarrow n = 4$

Phương trình của (Q) là :

$$(Q) : 9x + 11y + 5z - 21 = 0$$

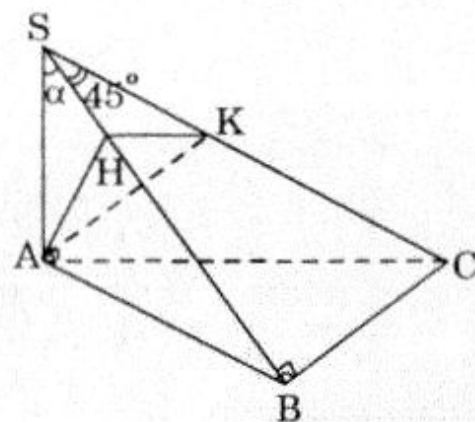
Ta có : $(P) \cap (Q) = (D')$

Vậy phương trình của hình chiếu vuông góc (D') của (D) xuống (P) là :

$$(D') : \begin{cases} 9x + 11y + 5z - 21 = 0 \\ 3x - 2y - z + 15 = 0 \end{cases}$$

Câu VI :

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left. \begin{aligned} (SBC) &\perp (SAB) \\ (ABC) &\perp (SAB) \end{aligned} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \\ & \Rightarrow BC \perp SB \end{aligned}$$



$\Rightarrow$ Hình cầu ngoại tiếp tứ diện. $SABC$ có tâm I là trung điểm SC và có :

$$R = \frac{SC}{2} = \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2} = a$$

2. $V = V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot BC \cdot \frac{1}{2} \cdot AS \cdot AB$

$$V = \frac{1}{6} (a\sqrt{2}) (a\sqrt{2} \cdot \sin\alpha) (a\sqrt{2} \cdot \cos\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3 \cdot \sin 2\alpha$$

$$V_{\text{lớn nhất}} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

3. Dựng $AH \perp SB$

$$HK \perp SC \Rightarrow AK \perp SC$$

$\Rightarrow \beta = \widehat{AKH}$ là góc phẳng nhị diện cạnh SC

Ta có : $\beta = 60^\circ \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{AH}{HK} = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{SH \cdot \operatorname{tg} \alpha}{SH} = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ.$$

Đề 17

Câu 1 :

Cho hàm số :

$$y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1).$$

1. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

Xác định tham số m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

2. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 0$.
 Tìm điểm $M \in (C)$ sao cho qua M chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến với (C).

Câu I :

1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2$$

2. Giải phương trình : $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y + \cot^2(x + y) = 1$.

Câu II :

1. Cho $m > 0$ và a, b, c là ba số bất kì thỏa mãn điều kiện :

$$\frac{a}{m+3} + \frac{b}{m+2} + \frac{c}{m+1} = 0$$

Chứng minh rằng khi đó phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(0; 1)$.

2. Xác định tham số m để phương trình sau có nghiệm :

$$\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = m$$

3. Giải phương trình : $\log_x(x+1) - \log 4,5 = 0$.

Câu III :

1. Tính các tích phân :

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin^2 x}{3^x + 1} \right) dx \quad ; \quad J = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

2. Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng :

$$\begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

và tiếp xúc với mặt cầu : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 15 = 0$.

Câu V :

Cho hình chóp tứ giác đều SABCD đỉnh S, cạnh đáy bằng a chiều cao bằng h.

1. Tính các bán kính R và r của các hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp tương ứng của hình chóp đó.
2. Gọi W là thể tích hình chóp, V_1 là thể tích hình cầu ngoại tiếp, V_2 là thể tích hình cầu nội tiếp hình chóp. Xác định quan hệ giữa a và h sao cho :

a) $\frac{V_2}{W}$ đạt giá trị lớn nhất. b) $\frac{V_2}{V_1}$ đạt giá trị lớn nhất.

Giải**Câu I :**

Cho hàm số :

$$y = f(x) = x^3 - 3(m+1)x^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x - 4m(m+1).$$

1. Chứng minh rằng khi m thay đổi, đồ thị của hàm số luôn đi qua một điểm cố định.

$$M_0(x_0, y_0) \in C_m, \quad \forall m$$

$$\Leftrightarrow y_0 = x_0^3 - 3(m+1)x_0^2 + 2(m^2 + 4m + 1)x_0 - 4m(m+1)$$

$$\Leftrightarrow m^2(2x_0 - 4) + m(-3x_0^2 + 8x_0 - 4) - x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - y_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 4 = 0 \\ -3x_0^2 + 8x_0 - 4 = 0 \\ x_0^3 - 3x_0^2 + 2x_0 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 0 \end{cases}$$

Vậy : C_m luôn đi qua $M_0(2; 0)$.

Xác định tham số m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

Ta có : $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-2)[x^2 - (3m+1)x + 2m(m+1)] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - (3m+1)x + 2m(m+1) = 0 \end{cases}$$

Để $f(x)$ có 2 nghiệm khác 2 thì x_1, x_2 thỏa : $1 < x_1 < x_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ 2f(1) > 0 \\ \frac{S}{2} > 1 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 2m + 1 > 0 \\ 2m^2 - m > 0 \\ \frac{3m+1}{2} > 1 \\ 2m^2 - 4m + 2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \vee m > \frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{3} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases}$$

2. $m = 0$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

MXĐ : $D = \mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2 \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{3}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$3-\sqrt{3}$	$3+\sqrt{3}$	$+\infty$			
f'		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\longrightarrow$	CD	$\longrightarrow$	CT	$\longrightarrow$	$+\infty$

Học sinh tự vẽ đồ thị.

Xét : $M_0(x_0, y_0) \in (C)$

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M_0(x_0, y_0)$.

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) :

$$f(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - x_0^3 - 3(x^2 - x_0^2) + 2(x - x_0) - (3x_0^2 - 6x_0 + 2)(x - x_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)[x^2 + x_0x + x_0^2 - 3(x + x_0) + 2 - 3x_0^2 + 6x_0 - 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - x_0)[x^2 + (x_0 - 3)x - 2x_0^2 + 3x_0] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 \\ x^2 + (x_0 - 3)x - 2x_0^2 + 3x_0 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Qua M chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C)

$$\Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm kép } x_0 \Leftrightarrow \frac{3 - x_0}{2} = x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1$$

Vậy $M_0(1, 0)$ là điểm cần tìm.

Câu II :

1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ta đều có :

$$\frac{\sin A + \sin B + \sin C}{\cos A + \cos B + \cos C} < 2 \quad (2)$$

$$\text{Ta có : } \sum \cos A = 1 + 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$$

$$(2) \Leftrightarrow \sum \sin A < 2 \sum \cos A$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \sum \sin A &= \sum \sin(B + C) = \sum (\sin B \cos C + \sin C \cos B) \\ &= \sum \sin B (\cos C + \cos A) < \sum (\cos C + \cos A) \end{aligned}$$

Vậy : $\sum \sin A < 2 \sum \cos A$

Chú ý : $\cos A + \cos C = 2 \cos \frac{A+C}{2} \cos \frac{A-C}{2} > 0.$

2. Hướng dẫn : dùng bất đẳng thức BCS chứng minh vế trái ≥ 1 .

Câu III :

1. Cho $m > 0$ và $\frac{a}{m+3} + \frac{b}{m+2} + \frac{c}{m+1} = 0$

Đặt : $f(x) = \frac{ax^{m+3}}{m+3} + \frac{bx^{m+2}}{m+2} + \frac{cx^{m+1}}{m+1}$

$\Rightarrow f'(x) = ax^{m+2} + bx^{m+1} + cx^m$

$\Leftrightarrow f'(x) = x^m(ax^2 + bx + c)$

Do : $f(0) = f(1) = 0$

$\Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1)$ thỏa $f'(x_0) = 0$

$\Rightarrow ax_0^2 + bx_0 + c = 0.$

Vậy : phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm x_0 thuộc khoảng $(0; 1)$.

2. $\sqrt{7-x} + \sqrt{2+x} - \sqrt{(7-x)(2+x)} = m \quad (1)$

Điều kiện : $-2 \leq x \leq 7$

Đặt : $u = \sqrt{7-x} ; v = \sqrt{2+x}$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = 9 \\ u + v - uv = m \\ u \geq 0 \text{ và } v \geq 0 \end{cases}$

Đặt : $S = u + v ; P = u.v$

Ta có : $\begin{cases} S^2 - 2P = 9 \\ S - P = m \end{cases} \Rightarrow S^2 - 2S - 9 + 2m = 0 \quad (2)$

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 1 + 9 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 5$

Khi đó (2) có nghiệm : $S = 1 \pm \sqrt{10 - 2m}$.

Để có nghiệm x ta phải có :

$$\begin{cases} S \geq 0 \\ P = S - m \geq 0 \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S \geq 0 \\ S \geq m \\ S^2 - 4P \geq 0 \end{cases}$$

TH 1 : $S = 1 + \sqrt{10 - 2m} \geq 0$, với $\forall m$

Ta có : $1 + \sqrt{10 - 2m} \geq m \Leftrightarrow \sqrt{10 - 2m} \geq m - 1$ (3)

* Nếu $m \leq 1$: bất phương trình thỏa.

* Nếu $m \geq 1$:

$$(3) \Leftrightarrow 10 - 2m \geq m^2 - 2m + 1 \Leftrightarrow m^2 \leq 9 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

$$S - 4P \geq 0 \Leftrightarrow 2m + 7 \geq 2\sqrt{10 - 2m}$$

Ta có : $m \leq -\frac{7}{2}$

$$\text{Suy ra : } m^2 + 9m + \frac{9}{4} \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{-9 + 6\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Vậy : } \frac{-9 + 6\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3$$

TH 2 : $S = 1 - \sqrt{10 - 2m}$

$$S \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \sqrt{10 - 2m} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}$$

Khi đó : $S \leq 1 \Leftrightarrow S < m$ (loại).

Vậy để phương trình có nghiệm ta phải có :

$$\frac{-9 + 6\sqrt{2}}{2} \leq m \leq 3.$$

3. Giải phương trình : $\log_x(x + 1) - \lg 4,5 = 0$

(1)

Điều kiện : $\begin{cases} 0 < x \\ x \neq 1 \end{cases}$

TH 1 : $0 < x < 1$

Khi đó : $\log_x(x+1) < \log_x 1 = 0 < \lg 4,5$

Vậy : phương trình (1) không có nghiệm thuộc $(0, 1)$.

TH 2 : $1 < x < +\infty$

Khi đó : $\log_x(x+1) > \log_x x = 1 > \lg 4,5$

Vậy : (1) không có nghiệm x thuộc $(1, +\infty)$.

Kết luận : (1) vô nghiệm.

Câu IV :

1. $I = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx$

$$I = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx + \int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx$$

$$I = I_1 + I_2$$

Xét : $I_1 = \int_{-\pi}^0 \frac{\sin^2 x}{3^x + 1} dx$

Đặt : $u = -x \Rightarrow du = -dx$ Đổi cận :

x	$-\pi$	0
u	π	0

$$I_1 = - \int_{\pi}^0 \frac{\sin^2 u}{3^{-u} + 1} du$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{3^u \sin^2 u}{3^u + 1} du$$

$$I_1 = \int_0^{\pi} \frac{3^x \sin^2 x}{3^x + 1} dx$$

$$I_2 + I_1 = \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) dx$$

$$\Leftrightarrow I = \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi} \Rightarrow I = \frac{\pi}{2}$$

$$J = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin x} dx$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{2} \left| \cos \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right| dx$$

$$\text{Ta có : } -\pi \leq x \leq \pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \frac{x}{2} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2} \leq \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Đặt : } t = \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \Rightarrow dt = \frac{1}{2} dx$$

$$J = 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\cos t| dt$$

$$\Leftrightarrow J = 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - 2\sqrt{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \cos t dt$$

$$\Leftrightarrow J = 2\sqrt{2} \sin t \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{2} \sin t \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\Leftrightarrow J = 2\sqrt{2} \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - 2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1 \right) = 4\sqrt{2}$$

2.

$$(d) = \begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$(S) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$$

Mặt cầu (S) có tâm I(-1; 3; -2), và bán kính :

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d} = \sqrt{1 + 9 + 4 + 15} = \sqrt{29}$$

Phương trình (α) chứa (d) có dạng :

$$8x - 11y + 8z - 30 + m(x - y - 2z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (8 + m)x - (11 + m)y + (8 - 2m)z - 30 = 0$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } d(I, \alpha) &= \frac{|-8 - m - 33 - 3m - 16 + 4m - 30|}{\sqrt{(8 + m)^2 + (11 + m)^2 + (8 - 2m)^2}} \\ &= \frac{87}{\sqrt{6m^2 + 6m + 249}} \end{aligned}$$

$$\alpha \text{ tiếp xúc với (S)} \Leftrightarrow d(I, \alpha) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{87}{\sqrt{6m^2 + 6m + 249}} = \sqrt{29} \Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng (α) thỏa điều kiện đề bài :

$$(\alpha_1) : 3x - 4y + 2z - 10 = 0$$

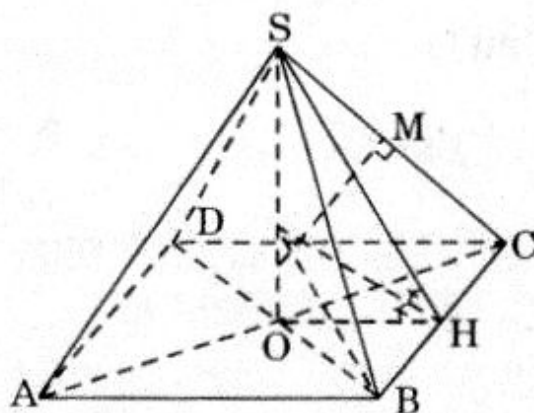
$$(\alpha_2) : 2x - 3y + 4z - 10 = 0$$

Câu V :

$$1. \quad R = SO = \frac{SM \cdot SC}{SH} = \frac{2h^2 + a^2}{4h}$$

$$r = IH = \frac{ah}{a + \sqrt{4h^2 + a^2}}$$

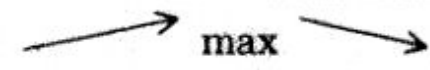
$$2. \quad \frac{V_2}{W} = \frac{4\pi ah}{\left(a + \sqrt{4h^2 + a^2}\right)}$$



$$\text{Đặt : } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{a} \Rightarrow \frac{V_2}{W} = \frac{\pi \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$$

$$\text{Đặt : } x = \cos \alpha \Rightarrow \frac{V_2}{W} = \frac{\pi(1-x)x}{(1+x)^2}$$

$$\text{Đặt : } f(x) = \frac{(1-x)x}{(1+x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{1-3x}{(1+x)^4}$$

x	0	$\frac{1}{3}$	1
f'	+	0	-
f			

$$\frac{V_2}{W} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow h = a\sqrt{2}$$

$$3. \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{4ah^2}{(2h^2 + a^2)(a + \sqrt{4h^2 + a^2})}$$

$$\frac{V_2}{V_1} \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow h = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+2}{2}}$$

Đề 18

Câu 1 :

$$\text{Cho hàm số : } y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1|} \text{ (vẽ hình riêng).}$$

2. Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình :

$$x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0$$

có nghiệm.

3. Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau đây có ba nghiệm phân biệt nằm trong đoạn $[-3; 0]$.

$$(t^2 + 2t)^2 - (m + 1)(t^2 + 2t) + m + 1 = 0$$

Câu II :

1. Giải phương trình : $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$ (1)

2. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn :

$$\sqrt{2} \cdot \cos 2x - \sin 4x \leq 0$$

Câu III :

Cho bất phương trình : $\log_2(x^2 + ax) \leq 2$ (2)

1. Giải bất phương trình (2) với $a = 3$.

2. Tìm giá trị lớn nhất của tham số a để cho $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình (2).

Câu IV :

$$(d) : \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua $A(1, 0, 0)$ và vuông góc với (d).

2. Tính khoảng cách từ $A(1, 0, 0)$ đến (d).

Câu V :

Tính tích phân : $\int_0^{\pi} x \cdot \cos^2 x \cdot dx$

Câu VI :

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông góc tại A, $AB = c$, $AC = b$. Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A, lấy một điểm S sao cho $SA = h$ ($h > 0$). M là một điểm di động trên cạnh SB. Gọi I, J lần lượt là các trung điểm của BC và AB.

1. Tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường SI và AB.
2. Tính tỉ số giữa thể tích các hình chóp BMIJ và BSCA khi đó độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường AC và MJ đạt giá trị lớn nhất.

Giải

Câu 1 :

Cho hàm số : $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số. Từ đó suy ra đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

Ta có : $F(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

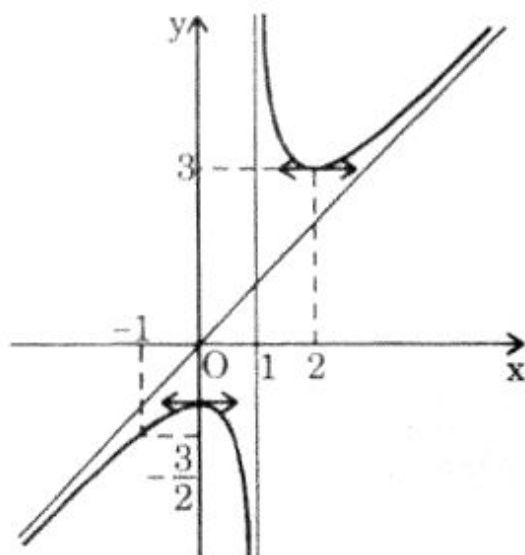
Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
f'		+ 0 -		- 0	
f		$\nearrow -1 \searrow$	$\parallel$	$\nearrow 3 \searrow$	
	$-\infty$		$-\infty$		$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \rightarrow \infty \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận đứng } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [y - x] = 0 \Rightarrow \text{đồ thị có tiệm cận xiên } y = x.$$

Ta có : đồ thị (C) của hàm số như sau :



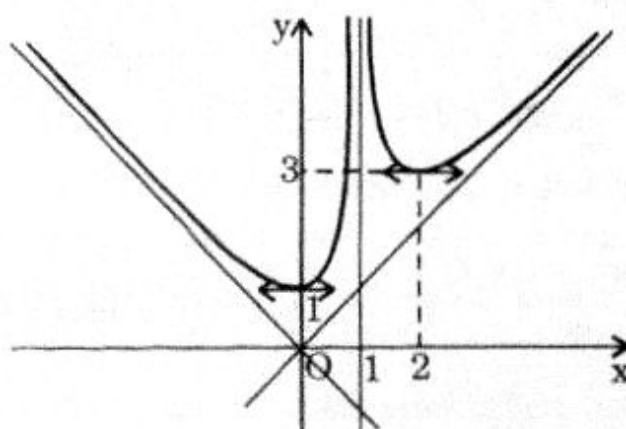
$$\text{Ta có : } y = g(x) = \frac{x^2 - x + 1}{|x - 1|} = \begin{cases} \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} & (x > 1) \\ -\frac{(x^2 - x + 1)}{x - 1} & (x < 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x) = \begin{cases} f(x) & (x > 1) \\ -f(x) & (x < 1) \end{cases}$$

Đồ thị (C₁) của g(x) suy ra từ đó đồ thị (C) của f(x) bằng cách :

- Giữ nguyên phần có $x > 1$.
- Lấy đối xứng của phần có $x < 1$ qua Ox

Ta có đồ thị (C₁) như sau :



2. Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau có nghiệm:

$$x^2 - (m+1)x + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - x + 1 = m(x-1) \quad (x \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x-1} = m \Leftrightarrow f(x) = m$$

Với : $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x-1} \Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = m \end{cases}$

Số nghiệm của phương trình (1) chính là số giao điểm của (C) và đường thẳng $y = m$. Theo đồ thị ta có :

$$(1) \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow m \leq 1 \vee m \geq 3.$$

3. Tìm tất cả các giá trị của m để cho phương trình sau đây có 3 nghiệm phân biệt nằm trong đoạn $[-3; 0]$:

$$(t^2 + 2t)^2 - (m+1)(t^2 + 2t) + m + 1 = 0 \quad (2)$$

Đặt : $u = t^2 + 2t \Rightarrow u' = 2t + 2$

Ta có :

t	-3	-1	0
u'		-	0
u	3	-1	0

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow u^2 - (m+1)u + m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow u^2 - u + 1 = m(u-1) \quad (u \neq 1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{u^2 - u + 1}{u-1} = m \quad (2)$$

(1) có ba nghiệm phân biệt nằm trong đoạn $[-3; 0] \Leftrightarrow (2)$ có hai nghiệm u_1 và u_2 thỏa :

$$-1 < u_1 \leq 0 < u_2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2} < m < -1.$$

Câu II :

1. Giải phương trình : $\sin^3 x \cdot \cos x - \cos^3 x \cdot \sin x = \frac{1}{4}$ (1)

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2x \cdot \cos 2x = -\frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \sin 4x = -\frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin 4x = -1 \quad \Leftrightarrow \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình (1) thỏa mãn :

$$\sqrt{2} \cos 2x - \sin 4x \leq 0 \quad (2)$$

Ta có :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos 2x - 2 \sin 2x \cdot \cos 2x \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x (\sqrt{2} - 2 \sin 2x) \leq 0$$

Thế các nghiệm của (1) vào (2) ta chỉ nhận được các họ nghiệm:

$$\begin{cases} x = \frac{3\pi}{8} + k2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{7\pi}{8} + l2\pi & (l \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

Câu III :

Cho bất phương trình : $\log_2(x^2 + ax) \leq 2$

1. Giải bất phương trình với $a = 3$

$$\text{Ta có : } \log_2(x^2 + 3x) \leq \log_2 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 3x \geq 0 \\ x^2 + 3x \leq 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \vee x > 0 \\ -4 \leq x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x < -3 \\ 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

2. Tìm giá trị lớn nhất của tham số a để cho $x = 1$ là một nghiệm của bất phương trình :

Ta có : $x = 1$ là nghiệm của (2)

$$\Leftrightarrow \log_2(1 + a) \leq 2 \Leftrightarrow \log_2(1 + a) \leq \log_2 4$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + a > 0 \\ 1 + a \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > -1 \\ a \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < a \leq 3.$$

Vậy giá trị lớn nhất của a là 3.

Câu IV :

$$A(1; 0; 0)$$

$$(d) : \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$

1. Viết phương trình mặt phẳng đi qua A và vuông góc với (d)

Gọi (α) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d , ta có :

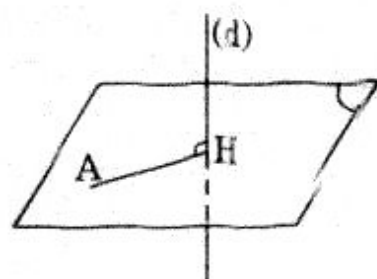
$$\vec{n}_\alpha = \vec{n}_d = (1; 2; 1) \Rightarrow (\alpha) : x + 2y + z + D = 0$$

$$A \in (\alpha) \Rightarrow 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

Vậy phương trình của (α) là : $x + 2y + z - 1 = 0$

2. Tính khoảng cách từ A đến d .

$$\text{Phương trình tham số của } d : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = t \end{cases}$$



Ta có : (d) cắt (α) tại H.

$$H \in (d) \Rightarrow H(2+t, 1+2t, t)$$

$$H \in (\alpha) \Rightarrow (2+t) + 2(1+2t) + t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 6t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; -\frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta có : } d(A, (d)) = AH = \sqrt{\left(\frac{3}{2} - 1\right)^2 + 0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Câu V :

$$\text{Tính tích phân : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos^2 x \cdot dx$$

$$\text{Ta có : } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + x \cos 2x) dx$$

$$= \frac{x^2}{4} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{2} J$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \cos 2x dx \Rightarrow v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{cases}$$

$$J = \frac{x}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x dx$$

$$J = \frac{x}{2} \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}$$

$$J = -\frac{1}{2} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} = \frac{\pi^2 - 4}{16}.$$

Câu VI :

1. Dựng : $IK \perp AC \Rightarrow IK \perp (SAC)$

Dựng : $AN \perp SK, NE \parallel AB, EF \parallel AN$

Ta có EF là đoạn vuông góc chung của SI và AB và $EF = AN$.

$$\frac{1}{AN^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AK^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{4}{b^2} = \frac{b^2 + 4h^2}{h^2b^2}$$

$$\Rightarrow EF = AN = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}$$

Vậy : $EF = \frac{bh}{\sqrt{b^2 + 4h^2}}.$

2. Dựng $AH \perp JM$, ta có AH chính là đoạn vuông góc chung của AC và MJ.

$$\Rightarrow AH \leq AJ = \frac{c}{2}$$

$$AH_{\text{lớn nhất}} \Leftrightarrow AH = \frac{c}{2} \Leftrightarrow H \equiv J$$

$$\Leftrightarrow M \text{ là trung điểm SB}$$

Khi đó ta có :

$$\frac{V_{BMLJ}}{V_{BSCA}} = \frac{BM}{BS} \times \frac{BI}{BC} \times \frac{BJ}{BA} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Vậy : $\frac{V_{BMLJ}}{V_{BSCA}} = \frac{1}{8}.$

Câu I :

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

- a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Xác định các giao điểm của đồ thị với trục hoành.

- b) Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ đến đồ thị từ điểm $A\left(\frac{23}{9}, -2\right)$.

- c) Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm từ đó có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Câu II :

1. Số đo ba góc của tam giác ABC lập thành một cấp số cộng và thỏa mãn đẳng thức :

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

- a) Tính các góc A, B, C.

- b) Biết nửa chu vi tam giác bằng 50 (đơn vị dài). Tính các cạnh tam giác.

2. Giải phương trình : $|\cot gx| = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x}$

Câu III :

Giải phương trình : $\sin x + \cos x = \sqrt{2} (2 - \sin 3x)$

Câu IV :

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$(d_1) : x = 2t - 3 \quad ; \quad y = 3t - 2 \quad ; \quad z = 4t + 6$$

$$(d_2) : x = t + 5 \quad ; \quad y = -4t - 1 \quad ; \quad z = t + 20$$

2. Ta nói rằng hai hàm $f(x)$ và $g(x)$ là trực giao với nhau trong đoạn $[-\pi; \pi]$ nếu :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x).g(x)dx = 0$$

Hãy chứng tỏ rằng hàm $U_m(x) = \cos mx$ trực giao với các hàm $U_k(x) = \cos kx$ ($k \neq m$) và $V_n(x) = \sin x$, ($m \in \mathbb{N}$; $n \in \mathbb{N}$; $k \in \mathbb{N}$).

Câu V :

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy bằng a và $\widehat{ASB} = \alpha$.

- Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp.
- Xác định tâm và bán kính mặt cầu nội tiếp hình chóp.
- Chứng minh rằng hai tâm mặt cầu đó trùng nhau khi và chỉ khi $\alpha = 45^\circ$.

Giải

Câu I :

Cho hàm số : $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

- Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

MXĐ : $D = \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
f'		+	0	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

$$f''(x) = 6x - 6$$

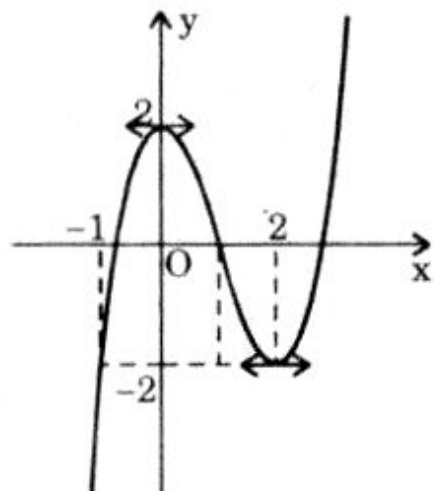
$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = 0$$

Điểm uốn $I(1, 0)$.

Giao điểm với Ox :

$$\begin{aligned}y = 0 &\Rightarrow x^3 - 3x^2 + 2 = 0 \\&\Rightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2) = 0 \\&\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}\end{aligned}$$



Đồ thị : (hình)

- b) Viết phương trình các tiếp tuyến kẻ đến đồ thị từ điểm $A\left(\frac{23}{9}, -2\right)$.

Phương trình đường thẳng (d) đi qua A và có hệ số góc k :

$$(d) : y + 2 = k\left(x - \frac{23}{9}\right) \Leftrightarrow y = k\left(x - \frac{23}{9}\right) - 2$$

(d) tiếp xúc với (C) khi hệ sau có nghiệm.

$$\begin{cases} x^3 - 3x^2 + 2 = k\left(x - \frac{23}{9}\right) - 2 \\ 3x^2 - 6x = k \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (3x^2 - 6x)\left(x - \frac{23}{9}\right) - 2$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 4 = 3x(x - 2)\left(x - \frac{23}{9}\right)$$

$$\Leftrightarrow (x + 1)(x - 2)^2 = 3x - 2\left(x - \frac{23}{9}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 3 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\bullet \text{ Với } x = 2 \Rightarrow k = 0 \Rightarrow (d) : y = -2$$

$$\bullet \text{ Với } x = 3 \Rightarrow k = 9 \Rightarrow (d) : y = 9x - 25$$

$$\bullet \text{ Với } x = \frac{1}{3} \Rightarrow k = -\frac{5}{3} \Rightarrow (d) : y = -\frac{5x}{3} + \frac{61}{27}$$

- c) Tìm trên đường thẳng $y = -2$ các điểm từ đó có thể kẻ đến đồ thị hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

Gọi : $M(m; -2)$ là một điểm trên đường thẳng $y = -2$. Giả sử từ M ta kẻ được tiếp tuyến Δ tiếp xúc với (C) tại $M_0(x_0; y_0)$.

Phương trình Δ :

$$y = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

$$M(m; -2) \in \Delta$$

$$\Rightarrow -2 = (3x_0^2 - 6x_0)(m - x_0) + x_0^3 - 3x_0^2 + 2$$

$$\Leftrightarrow 2x_0^3 - 3(m+1)x_0^2 + mx_0 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 2)[2x_0^2 - (3m-1)x_0 + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ 2x_0^2 - (3m-1)x_0 + 2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của (1) ta có :

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(3m-1) \end{cases}$$

Từ M kẻ được hai tiếp tuyến vuông góc đến (C) , suy ra :

$$f'(x_1) f'(x_2) = -1$$

$$\Rightarrow (3x_1^2 - 6x_1)(3x_2^2 - 6x_2) = -1$$

$$\Rightarrow 9x_1x_2[x_1x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4] = -1$$

$$\Rightarrow 9[5 - (3m-1)] = -1 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{55}{27}$$

Thử lại với $m = \frac{55}{27}$, (1) có nghiệm.

Vậy : $M\left(\frac{55}{27}, -2\right)$ là điểm cần tìm.

Câu II :

1. Giả sử : $A \geq B \geq C$; $A + C = 2B$

$$\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$$

a) Tính các góc A, B, C :

$$A + B + C = \pi \quad \Rightarrow \quad 3B = \pi \quad \Rightarrow \quad B = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow A + C = \frac{2\pi}{3}$$

$$\sin A + \sin C = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad A - C = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A + C = \frac{2\pi}{3} \\ A - C = \frac{\pi}{3} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{\pi}{2}; \quad C = \frac{\pi}{6}$$

b) $\frac{a+b+c}{2} = 50 \quad \Rightarrow \quad a + b + c = 100$

$$b = a \sin \frac{\pi}{3} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$c = a \sin \frac{\pi}{6} = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow \quad a + \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{a}{2} = 100$$

$$\Rightarrow a = \frac{200}{3 + \sqrt{3}}; \quad b = \frac{100\sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}}; \quad c = \frac{100}{3 + \sqrt{3}}$$

2. Giải phương trình : $|\cot gx| = \operatorname{tg} x + \frac{1}{\sin x} \quad (1)$

Điều kiện : $\begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x \neq k\frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$

TH1 : $\cot gx > 0$

$$(1) \Leftrightarrow \cotgx = \tgx + \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = \cos x$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = -x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta chỉ nhận nghiệm : $x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

TH2 : $\cotgx < 0$

$$(1) \Leftrightarrow -\cotgx = \tgx + \frac{1}{\sin x} \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 x + \cos x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi \text{ (loại)}$$

Vậy nghiệm của phương trình là :

$$x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu III :

Giải phương trình :

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} (2 - \sin 3x) \quad (1)$$

$$\text{Ta có : } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} (2 - \sin 3x) \geq \sqrt{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = \sqrt{2} \\ \sqrt{2}(2 - \sin 3x) = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi & (2) \\ \sin 3x = 1 & (3) \end{cases}$$

Thế (2) vào không thỏa (3), vậy hệ phương trình vô nghiệm.

Câu IV :

1. Chứng minh rằng hai đường thẳng sau đây cắt nhau :

$$(d_1) : \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -2 + 3t \\ z = 6 + 4t \end{cases} \quad (d_2) : \begin{cases} x = 5 + t' \\ y = -1 - 4t' \\ z = 20 + t' \end{cases}$$

Giao điểm của (d_1) và (d_2) ứng với giá trị của hai tham số t và t' xác định bởi hệ :

$$\begin{cases} 2t - 3 = t' + 5 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3t - 2 = -4t' - 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4t + 6 = t' + 20 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \text{ và } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t' = -2 \end{cases}$$

Thế vào (3) thỏa.

Vậy : (d_1) cắt (d_2) tại $M(3; 7; 18)$.

2. Ta có :

$$\begin{aligned} a) \quad I &= \int_{-\pi}^{\pi} U_m U_k dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos kx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\cos(k+m)x + \cos(k-m)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(k+m)x}{k+m} + \frac{\sin(k-m)x}{k-m} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 \end{aligned}$$

Vậy $U_m(x)$ trực giao với $U_k(x)$.

Với $k \neq m$.

$$\begin{aligned} b) \quad J &= \int_{-\pi}^{\pi} U_m V_n dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \sin nx dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin(n+m)x + \sin(n-m)x] dx \end{aligned}$$

TH1 : $n = m$

$$J = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} [\sin 2nx] dx = \left[\frac{-1}{4n} \cos 2nx \right]_{-\pi}^{\pi} = 0$$

TH2 : $n \neq m$

$$J = -\frac{1}{2} \left[\frac{\cos(n+m)x}{n+m} + \frac{\cos(n-m)x}{n-m} \right] \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

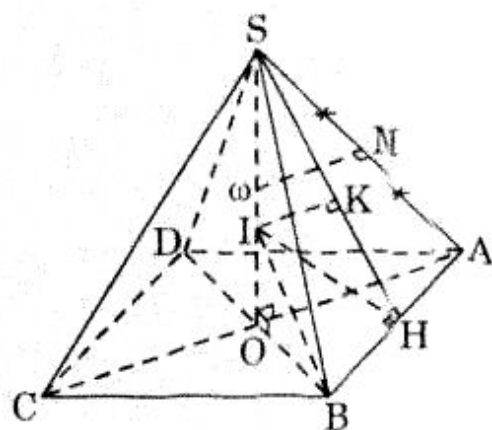
Vậy : $U_m(x)$ trực giao với $V_n(x)$.

Câu V :

- a) Trong tam giác SAO, đường trung trực của SA cắt SO tại ω .
Ta có ω là tâm hình cầu ngoại tiếp.

$$S\omega \cdot SO = SM \cdot SA$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow R = S\omega &= \frac{SA^2}{SO} \\ &= \frac{a}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{\cos \alpha}} \end{aligned}$$



- b) Gọi H là trung điểm của AB. Trong tam giác SHO, đường phân giác của góc SHO cắt SO tại I. Ta có I là tâm hình cầu nội tiếp.

$$\begin{aligned} \frac{IO}{IS} &= \frac{HO}{HS} \Rightarrow r = IO = \frac{HO \cdot SO}{HO + HS} \\ \Rightarrow r &= \frac{a}{2} \frac{\left(\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right)}{\sqrt{\cos \alpha}} \end{aligned}$$

- c) Giả sử : $I \equiv \omega$.

Dựng : $IK \perp (SAB)$

$$IO = IK \Rightarrow \triangle IOB = \triangle IKB \Rightarrow OB = KB$$

$\Rightarrow$ hai đường tròn ngoại tiếp ABCD và SAB bằng nhau.

$\Rightarrow ASB = ACD$ (cùng chắn cung AB).

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$.

Phần đảo kiểm lại dễ dàng nhờ câu 2.

Đề 20

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{x - m}$ (1)

1. Với $m = 1$, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.
2. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, đồ thị hàm số (1) luôn luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.
3. Xác định m để hàm số (1) tăng trên $(1; +\infty)$.

Câu II :

1. Giải bất phương trình : $\log_{(3x-x^2)}(3-x) > 1$
2. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$U = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 16xz - 24yz$$

Câu III :

1. Giải phương trình : $2\cos^2\left(\frac{3x}{5}\right) + 1 = 3\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$
2. Với r, R lần lượt là bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC, chứng minh rằng :

$$1 + \left(\frac{r}{R}\right) = \cos A + \cos B + \cos C.$$

Câu IV :

Cho tứ diện ABCD với $AB \perp CD$, có I, J lần lượt là trung điểm AB, CD và IJ là đường vuông góc chung của AB và CD.

1. Chứng minh $AC = AD = BC = BD$.
2. Với O là điểm trong đoạn IJ. Chứng minh O cách đều hai mặt phẳng (ABC), (ABD) và O cách đều hai mặt phẳng (ACD), (BCD).

3. Một điểm M trong đoạn AC, mặt phẳng (IMJ) cắt BD tại N. Chứng minh $MN \perp IJ$ và IJ qua trung điểm của MN.

Câu V :

1. Cho tam giác ABC với $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(-4; 7; 5)$. Tính độ dài đường phân giác trong, kẻ từ đỉnh B.

2. Tính : $\int_0^{\pi} \frac{(x \sin x)}{(1 + \cos^2 x)} dx$

Giải

Câu I :

$$y = f(x) = \frac{2x^2 + (1 - m)x + 1 + m}{x - m}$$

1. Với $m = 1$, khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số.

Với $m = 1 \Rightarrow f(x) = \frac{2x^2 + 2}{x - 1}$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x - 2}{(x - 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
f'	+	0	-	-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$ CĐ	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$ CT	$\nearrow$	$+\infty$

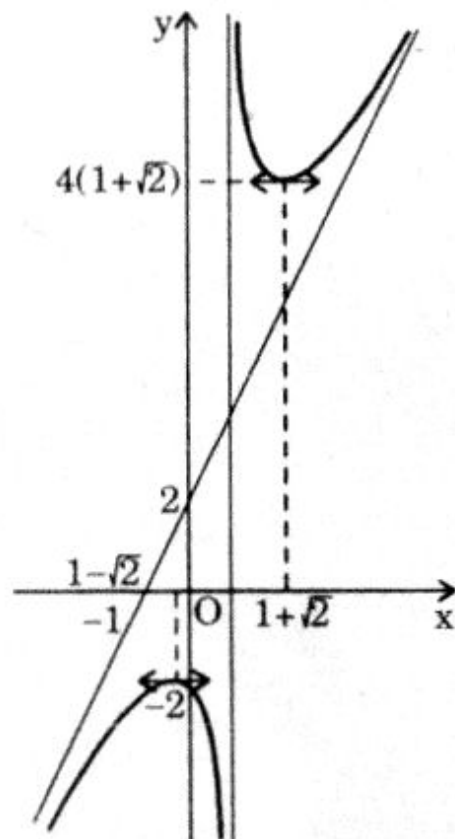
$$\text{CD} : f(1 - \sqrt{2}) = 4(1 - \sqrt{2})$$

$$\text{CT} : f(1 + \sqrt{2}) = 4(1 + \sqrt{2})$$

$$\text{Tiệm cận đứng} : x = 1$$

$$\text{Tiệm cận xiên} : y_{\infty} = 2x + 2$$

Đồ thị : (hình)



2. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, đồ thị hàm số luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Gọi $M_0(x_0; y_0)$ là điểm cố định.

Ta có : $M_0 \in (C_m)$

$$\Leftrightarrow y_0 = \frac{2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1 + m}{x_0 - m} \quad (\forall m \neq x_0)$$

$$\Leftrightarrow y_0(x_0 - m) = 2x_0^2 + (1-m)x_0 + 1 + m \quad (\forall m \neq x_0)$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - y_0 - 1)m + y_0x_0 - 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \quad (\forall m \neq x_0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ y_0x_0 - 2x_0^2 - x_0 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Vậy : $\forall m \neq -1$ (C_m) qua $M_0(-1; -2)$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2}$$

$$f'(-1) = \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2} = 1 \quad (\forall m \neq -1)$$

Phương trình tiếp tuyến với (C_m) tại $M_0(-1; -2)$

$$y + 2 = (x + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = x - 1 \quad (\Delta)$$

Vậy : $\forall m \neq -1$ (C_m) luôn tiếp xúc với đường (Δ) cố định tại M_0 cố định.

3. Xác định m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Ta có : $f'(x) = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2}$

Đặt : $g(x) = 2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1$

$$\Delta' = 2(m + 1)^2$$

TH1 : $m = -1$

Ta có : $f(x)$ tăng trên $(1; +\infty)$

TH2 : $m \neq -1$

$f'(x)$ có 2 nghiệm x_1, x_2 .

x	$-\infty$	x_1	m	x_2	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f					

f tăng trên $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x_1 < x_2 \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2g(1) \geq 0 \\ m < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 1 \geq 0 \\ m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 3\sqrt{2}$$

Câu II :

1. Giải bất phương trình : $\log_{(3x-x^2)}(3-x) > 1 \quad (1)$

$$(1) \Leftrightarrow \log_{(3x-x^2)}(3-x) > \log_{(3x-x^2)}(3x-x^2)$$

$$TH1 : \begin{cases} 3x - x^2 > 1 \\ 3 - x > 3x - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 1 < 0 \\ x^2 - 4x + 3 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < 1$$

$$TH2 : \begin{cases} 0 < 3x - x^2 < 1 \\ 0 < 3 - x < 3x - x^2 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 3 < 0 \\ x^2 - 3x + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x < 3$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là :

$$\begin{cases} \frac{3 - \sqrt{5}}{2} < x < 1 \\ \frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x < 3 \end{cases}$$

2. Tìm GTNN của :

$$U = 19x^2 + 54y^2 + 16z^2 + 36xy - 16xz - 24yz$$

Xem U là tam thức bậc hai đối với x.

$$U = 19x^2 - 2(8z - 18y)x + 54y^2 + 16z^2 - 24yz$$

$$\Delta'_x = (8z - 18y)^2 - 19(54y^2 + 16z^2 - 24yz)$$

$$\Delta'_x = -702y^2 + 168yz - 240z^2$$

Xem Δ'_x là tam thức bậc hai đối với y.

$$\Delta'_x = 84^2 z^2 - 702 \cdot 240 z^2 = -161424 z^2 \leq 0 \quad \forall z$$

$$\Rightarrow \Delta'_x \leq 0 ; \forall y, z \quad \Rightarrow U \geq 0 ; \forall x, y, z$$

$$\Rightarrow U_{\min} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = y = z = 0.$$

Câu III :

1. Giải phương trình : $2\cos^2\left(\frac{3x}{5}\right) + 1 = 3\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow 1 + \cos\left(\frac{6x}{5}\right) + 1 = 3\cos\left(\frac{4x}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^3\left(\frac{2x}{5}\right) - 6\cos^2\left(\frac{2x}{5}\right) - 3\cos\left(\frac{2x}{5}\right) + 5 = 0$$

Đặt : $t = \cos\left(\frac{2x}{5}\right)$ ($-1 \leq t \leq 1$)

$$(1) \Leftrightarrow 4t^3 - 6t^2 - 3t + 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(4t^2 - 2t - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \\ t = \frac{1 + \sqrt{21}}{4} \end{cases} \quad (\text{loại})$$

• $t = 1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{2x}{5}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x}{5} = k2\pi \Leftrightarrow x = k5\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

• $t = \frac{1 - \sqrt{21}}{4} \Leftrightarrow \cos \frac{2x}{5} = \frac{1 - \sqrt{21}}{4}$

$$\Leftrightarrow x = \pm \frac{5}{2} \arccos\left(\frac{1 - \sqrt{21}}{4}\right) + k5\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Chứng minh rằng $1 + \left(\frac{r}{R}\right) = \cos A + \cos B + \cos C$:

Ta có : $\cos A + \cos B + \cos C = 4\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} + 1$

$$r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{2R \sin A \cdot \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{R} = 4 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

$$\text{Vậy : } 1 + \left(\frac{r}{R} \right) = \cos A + \cos B + \cos C.$$

Câu IV :

$$1. \left. \begin{array}{l} AB \perp IJ \\ AB \perp CD \end{array} \right\} \Rightarrow AB \perp (CID)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB \perp IC \\ AB \perp ID \end{array} \right.$$

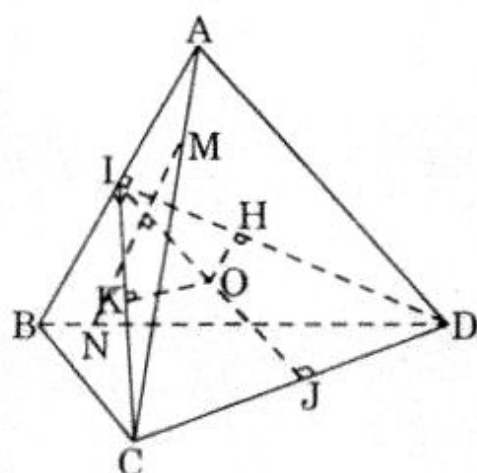
$$\Rightarrow \begin{array}{l} CA = CB \\ DA = CA \end{array}$$

$$\text{Tương tự : } CD \perp (AJB)$$

$$\Rightarrow CD \perp AJ \quad ; \quad CD \perp BJ$$

$$\Rightarrow AC = AD \quad ; \quad BC = BD$$

$$\text{Vậy : } AC = AD \quad ; \quad BC = BD$$



2. IJ là phân giác tam giác cân CID.

$$\text{Dựng : } \left. \begin{array}{l} OH \perp ID \\ OK \perp IC \end{array} \right\} \Rightarrow OH = OK$$

Vậy : O cách đều hai mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Tương tự O cách đều (ACD), (BCD).

3. Xét phép biến hình F là phép đối xứng qua trục IJ ta có :

$$f : R^3 \mapsto R^3$$

$$A \mapsto B$$

$$C \mapsto D$$

$$f: AC \mapsto BD$$

$$M \mapsto N$$

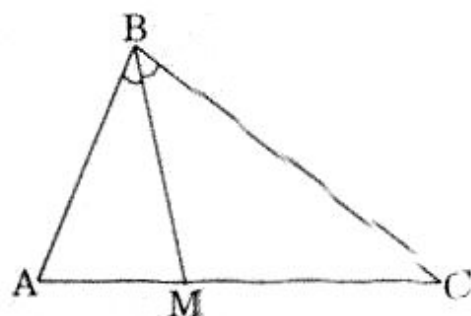
$\Rightarrow IJ$ vuông góc với MN tại trung điểm của MN .

Câu V :

1. M là chân phân giác trong góc B .

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{MC}} = \frac{BA}{BC} = \frac{\sqrt{26}}{2\sqrt{26}} = \frac{1}{2} = k$$

$$\Rightarrow M \begin{cases} x_M = \frac{x_A + kx_C}{1+k} = -\frac{2}{3} \\ y_M = \frac{y_A + ky_C}{1+k} = \frac{11}{3} \\ z_M = \frac{z_A + kz_C}{1+k} = -1 \end{cases}$$



$$M\left(-\frac{2}{3}; \frac{11}{3}; -1\right) \Rightarrow BM = \frac{2\sqrt{74}}{3}$$

2.

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(x \sin x)}{(1 + \cos^2 x)} dx$$

$$\text{Đặt: } x = \pi - t$$

$$dx = -dt$$

$$I = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

x	t
0	π
π	0

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{1 + \cos^2 t} dt - \int_0^{\pi} \frac{t \sin t}{1 + \cos^2 t} dt$$

$$= -\pi \cdot \arctg(\cos t) \Big|_0^{\pi} - I$$

$$\Rightarrow 2I = -\frac{\pi}{2} \arctg(\cos t) \Big|_0^{\pi} \Rightarrow I = \frac{\pi^2}{4}$$

Đề 21

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{(m-1)(x^2 - 2x) + m + 4}{mx + m}$

với tham số m lấy mọi giá trị khác 0 và $-\frac{1}{4}$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 2$.
2. Với những giá trị nào của m thì đồ thị hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$.
3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu. Xác định m để giá trị cực đại và cực tiểu cùng dấu nhau.

Câu II :

Cho ba số thực a, b, c thỏa mãn :

$$abc = 1 \quad \text{và} \quad a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

1. Chứng minh rằng : $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$
2. Chứng minh rằng trong ba số a, b, c có đúng một số lớn hơn 1.

Câu III :

Trong tam giác ABC kí hiệu $a = BC, b = AC, c = AB$.

1. Chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để $\hat{A} = 2\hat{B}$ là :

$$a^2 = b^2 + bc$$

2. Xác định các góc $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, biết rằng ba cạnh a, b, c thỏa mãn các hệ thức :

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + ac \\ c^2 = b^2 + ab \end{cases}$$

Câu IV :

Cho phương trình : $2\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + m = 7\cos 2x$.

1. Giải phương trình với $m = 5$ bằng cách đặt $t = \cos 2x$.
2. Tìm tất cả những giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm duy nhất trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu V :

Cho $I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

1. Tính I_1 .
 2. Chứng minh rằng : $I_n = \frac{e^{1-n} - 1}{1 - n} - I_{n-1}$ với mọi $n > 1$.
- Tính I_3 .
3. Chứng minh rằng tồn tại $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n)$. Tìm giá trị giới hạn đó.

Câu VI :

Cho hai đường thẳng d và d' chéo nhau và vuông góc với nhau. Trên d' lấy hai điểm lưu động B, C sao cho các mặt phẳng (d, B) và (d, C) vuông góc với nhau. A là một điểm lưu động trên d , gọi A' là chân đường vuông góc hạ từ A xuống d' .

1. Chứng minh rằng tích $A'B \cdot A'C$ không đổi.
2. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Gọi Δ là đường thẳng đi qua H và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Chứng minh rằng đường thẳng Δ luôn đi qua một điểm cố định.
3. Tìm quỹ tích của điểm H .

Ghi chú : Thí sinh khối B không phải làm mục 3, câu I và mục 2, câu III (Phần bắt buộc).

2. Với những giá trị nào của m thì đồ thị của hàm số tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và $(\Delta) : y = 1$ là :

$$\frac{(m-1)(x^2 - 2x) + m + 4}{mx + m} = 1 \quad (mx + m \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (m-1)(x^2 - 2x) + m + 4 = mx + m$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 + (2-3m)x + 4 = 0 \quad (1)$$

$$(C_m) \text{ tiếp xúc với } (\Delta) \Leftrightarrow (1) \text{ có nghiệm kép} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (2-3m)^2 - 16(m-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{10}{9} \\ m = 2 \end{cases}$$

3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có cực đại và cực tiểu. Xác định m để giá trị cực đại và cực tiểu cùng dấu nhau.

$$f(x) = \frac{(m-1)(x^2 - 2x) + m + 4}{mx + m}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{m(m-1)x^2 + 2m(m-1)x - 3m^2 - 2m}{(mx + m)^2}$$

$f(x)$ có cực đại và cực tiểu $\Rightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$x \neq -1 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(-1) \neq 0 \\ m(m-1) \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m \neq 0, m \neq -\frac{1}{4} \\ m \neq 0, m \neq 1 \\ \begin{cases} m < -\frac{1}{4} \\ m > 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy : } f(x) \text{ có cực đại và cực tiểu} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{1}{4} \\ m > 1 \end{cases} \quad (3)$$

Gọi x_1, x_2 là hoành độ 2 điểm cực trị của $f(x)$, ta có :

$$f(x_1) = \frac{2(m-1)(x_1-1)}{m}$$

$$f(x_2) = \frac{2(m-1)(x_2-1)}{m}$$

Giá trị cực đại và cực tiểu cùng dấu

$$\Rightarrow f(x_1).f(x_2) = \frac{4(m-1)^2}{m^2} (x_1-1)(x_2-1) > 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1 + x_2) + 1 > 0$$

Theo Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 \cdot x_2 = -\frac{3m+2}{m-1} \end{cases} \Rightarrow -\frac{3m+2}{m-1} + 3 > 0$

$$\Leftrightarrow \frac{-5}{m-1} > 0 \Leftrightarrow m < 1 \quad (4)$$

Từ (3), (4) $\Rightarrow m < \frac{-1}{4}$.

Câu II :

Cho $\begin{cases} abc = 1 \\ a + b + c > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \end{cases} \quad (1)$

(2)

1. Chứng minh rằng : $(a-1)(b-1)(c-1) > 0 \quad (3)$

Ta có :

$(3) \Leftrightarrow abc - ab - ac - bc + a + b + c - 1 > 0 \quad (4)$

Ta lại có :

$(2) \Rightarrow a + b + c > \frac{ab + bc + ca}{abc}$

$\Leftrightarrow a + b + c > ab + bc + ca$

$\Leftrightarrow abc - ab - bc - ca + a + b + c - 1 > 0 \quad (\text{theo (1)})$

Vậy : (4) đúng $\Rightarrow$ (3) đúng.

2. Chứng minh rằng trong 3 số a, b, c có đúng một số lớn hơn 1.

Ta có : $(a-1)(b-1)(c-1) > 0$

Suy ra hoặc cả 3 số a, b, c đều lớn hơn 1 hoặc trong 3 số a, b, c có đúng một số lớn hơn 1.

Giả sử: $a > 1; b > 1; c > 1$

$\Rightarrow abc > 1$: mâu thuẫn với (1).

Vậy: trong 3 số a, b, c có đúng một số lớn hơn 1.

Câu III:

Trong tam giác ABC, kí hiệu $a = BC, b = AC, c = AB$.

1. Chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để $\hat{A} = 2\hat{B}$ là $a^2 = b^2 + bc$.

Ta có: $a^2 = b^2 + bc$

$$\Leftrightarrow (2R\sin A)^2 = (2R\sin B)^2 + (2R\sin B)(2R\sin C)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin^2 B + \sin B \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1 - \cos 2A}{2} \right) - \left(\frac{1 - \cos 2B}{2} \right) = \sin B \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \cos 2B - \cos 2A = 2\sin B \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow -2\sin(B + A) \cdot \sin(B - A) = 2\sin B \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin C \cdot \sin(A - B) = \sin B \cdot \sin C$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = \sin B \quad (\text{vì } \sin C \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow A - B = B \quad (0 < A; B < \pi)$$

$$\Leftrightarrow A = 2B$$

2. Xác định các góc A, B, C biết rằng ba cạnh a, b, c thỏa mãn các hệ thức:

$$\begin{cases} b^2 = a^2 + ac \\ c^2 = b^2 + ab \end{cases} \quad (1)$$

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} B = 2A \\ C = 2B \end{cases}$$

$$A + B + C = \pi \Rightarrow A + 2A + 4A = \pi$$

$$\Rightarrow A = \frac{\pi}{7}; B = \frac{2\pi}{7}; C = \frac{4\pi}{7}$$

Câu IV :

Cho phương trình : $2\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + m = 7\cos 2x$ (1)

1. Giải phương trình với $m = 5$:

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 2\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 3x + 5 = 7\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow (\cos 4x + \cos 2x)\cos 2x + 5 = 7\cos 2x$$

Đặt $t = \cos 2x$ ($-1 \leq t \leq 1$)

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow (2t^2 - 1 + t)t + 5 = 7t \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 8t + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 1)(2t^2 + 3t - 5) = 0 \Leftrightarrow (t - 1)^3 (2t + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{5}{2} \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi \Leftrightarrow x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Tìm tất cả những giá trị của m để phương trình đã cho có nghiệm x duy nhất trong đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ta có : $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq t \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 8t = -m$$

Đặt : $f(t) = 2t^3 + t^2 - 8t$; $f'(t) = 6t^2 + 2t - 8$

Bảng biến thiên :

t	0	1
f'		-
f	0	-5

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\Leftrightarrow -5 \leq -m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 5$$

Câu V :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx$$

1. Tính I_1 :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx = - \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} dx \\ &= -\ln(1+e^{-x}) \Big|_0^1 \\ &= [-\ln(1+e^{-1})] - [-\ln 2] \\ &= \ln 2 - \ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) \\ \Rightarrow I_1 &= \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) \end{aligned}$$

2. Chứng minh rằng : $I_n = \frac{e^{1-n} - 1}{1-n} - I_{n-1} \quad (n > 1)$

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } I_n + I_{n-1} &= \int_0^1 \left[\frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} + \frac{e^{-(n-1)x}}{1+e^{-x}} \right] dx \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-(n-1)x}(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} dx = \int_0^1 e^{-(n-1)x} dx \\ &= \frac{e^{(1-n)x}}{1-n} \Big|_0^1 = \frac{e^{1-n} - 1}{1-n} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy : } I_n = \frac{e^{(1-n)} - 1}{1-n} - I_{n-1}$$

$$\text{Ta có : } I_3 = \frac{e^{(1-3)} - 1}{1-3} - I_2 = \frac{1-e^{-2}}{2} - I_2$$

$$I_2 = \frac{e^{(1-2)} - 1}{1-2} - I_1 = \frac{1-e^{-1}}{1} - \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow I_3 &= \frac{e^2 - 1}{2e^2} - (e-1) + \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) \\ &= (e-1) \left(\frac{-2e^2 + e + 1}{2e^2} \right) + \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right) \end{aligned}$$

3. Giả sử: $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} I_{n-1} = l$

$$\Rightarrow l = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{1-n} - 1}{1-n} - l \Rightarrow l = 0 - l \Rightarrow l = 0$$

Ta có: $0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx$

$$\Rightarrow 0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n} \text{ mà } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-e^{-n}}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \text{tồn tại } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n \text{ và } \lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0.$$

Câu VI:

1. Dựng mặt phẳng (α) chứa d' và d tại O (cố định).

$$\Rightarrow \begin{cases} AA' \perp d' \\ OA' \perp d' \end{cases}$$

Ta có: $A'B \cdot A'C = A'O^2 = \text{const.}$

$$2. \left. \begin{matrix} AB \perp CH \\ AB \perp OC \end{matrix} \right\} \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow OH \perp AB$$

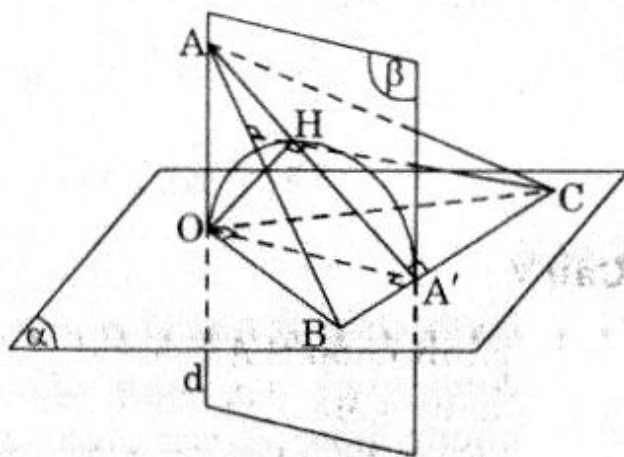
$$\left. \begin{matrix} OH \perp BC \\ OH \perp AB \end{matrix} \right\} \Rightarrow OH \perp (ABC)$$

Vậy: Δ đi qua O cố định.

3. Đặt $(\beta) = (d, A')$

$$H \in (\beta) \text{ và } \widehat{OHA'} = 90^\circ$$

Vậy: quỹ tích H là đường tròn đường kính AO' trong mặt phẳng (β) .



Đề 22

Câu I:

Cho hàm số: $y = \frac{x^2 \cos 2a + 2x \sin 2a + 1}{x+2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $a \neq 0$.

2. Xác định a để đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có bán kính lớn nhất.

Câu II :

Xác định tham số m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình :

$$2\log_4(8x^2 - 2x + 2m - 4m^2) + \log_{0,5}(4x^2 + 2mx - 2m^2) = 0$$

lớn hơn 0,25.

Câu III :

Tam giác ABC có các góc và các cạnh thỏa mãn hệ thức sau :

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}}$$

Chứng minh rằng tam giác ABC cân.

Câu IV :

Tìm các giá trị của a để hệ hai phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0 \end{cases}$$

Câu V :

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi K là điểm giữa của cạnh SG. Một mặt phẳng di động qua AK nhưng luôn cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M và N.

Chứng minh :

1. $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$.
2. Nếu gọi V là thể tích hình chóp S.ABCD và V_1 là thể tích hình chóp S.AMKN. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất và tỉ số $\frac{V_1}{V}$.

Câu VI :

1. Chứng minh rằng $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0$.
2. M là một điểm thuộc parabol $y^2 = 64x$, N là một điểm thuộc đường thẳng $4x + 3y + 46 = 0$.
 - a) Xác định M, N để đoạn MN là ngắn nhất.
 - b) Với kết quả đã tìm được ở a), chứng tỏ rằng khi đó đường MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của parabol.

Giải

Câu :

$$y = \frac{x^2 \cos 2a + 2x \sin 2a + 1}{x + 2}.$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $a = 0$.

Khi $a = 0 \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{x + 2}$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 4x - 1}{(x + 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 - \sqrt{5} \\ x = -2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$-2 - \sqrt{5}$	-2	$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow$ CĐ $\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$ CT $\nearrow$	$+\infty$

$$\text{CD} : f(-2 - \sqrt{5}) = 2(-2 - \sqrt{5})$$

$$\text{CT} : f(-2 + \sqrt{5}) = 2(-2 + \sqrt{5})$$

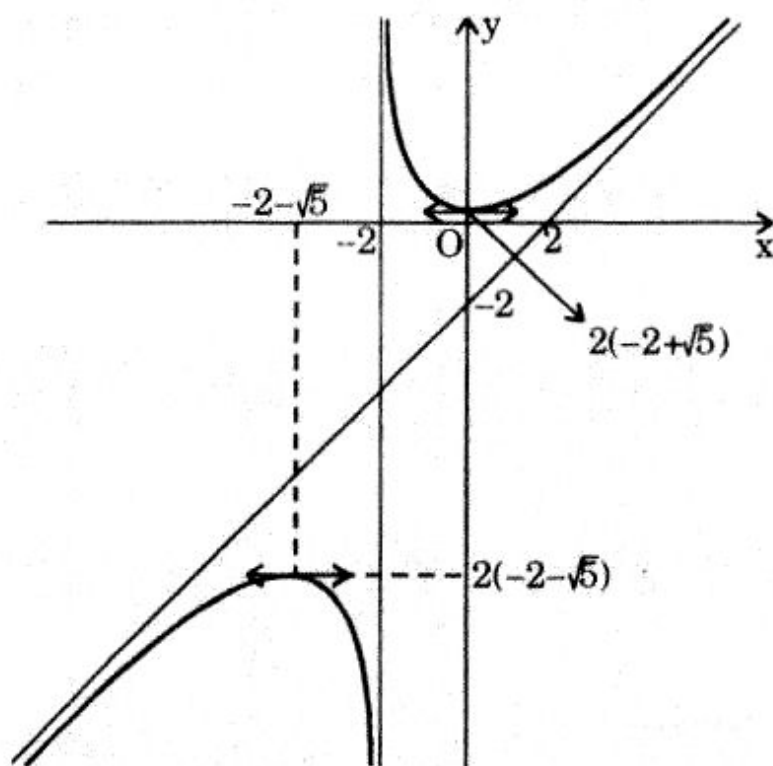
$$\lim_{x \rightarrow -2} = \infty : \text{Tiệm cận đứng } x = -2.$$

$$y = f(x) = x - 2 + \frac{5}{x + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x + 2} = 0 : \text{Tiệm cận xiên } y = x - 2.$$

$$\text{Điểm đặc biệt : } x = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

Đồ thị : (hình)



2. Xác định a để đường tròn có tâm ở gốc tọa độ và tiếp xúc với tiệm cận xiên của đồ thị hàm số có bán kính lớn nhất.

Ta chia đa thức :

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 \cos 2a + 2x \sin 2a + 1 & x + 2 \\
 \hline
 -x^2 \cos 2a - 2x \cos 2a & x \cos 2a + 2(\sin 2a - \cos 2a) \\
 \hline
 2x(\sin 2a - \cos 2a) + 1 & \\
 \hline
 -2x(\sin 2a - \cos 2a) - 4(\sin 2a - \cos 2a) & \\
 \hline
 & 1 - 4(\sin 2a - \cos 2a)
 \end{array}$$

Tiệm cận xiên :

$$\Delta : y = x \cos 2a + 2(\sin 2a - \cos 2a)$$

$$\Leftrightarrow x \cos 2a - y + 2(\sin 2a - \cos 2a) = 0$$

$$R = d(O, \Delta) = \frac{|2(\sin 2a - \cos 2a)|}{\sqrt{\cos^2 2a + 1}}$$

Cách 1 : (dùng bất đẳng thức Bunhiacôpski)

$$R = \frac{\left| 2(1)(\sin 2a) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2} \cos 2a) \right|}{\sqrt{2 \cos^2 2a + \sin^2 2a}}$$

$$R \leq \frac{2 \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{1}{2}\right)(2 \cos^2 2a + \sin^2 2a)}}{\sqrt{2 \cos^2 2a + \sin^2 2a}}$$

$$R \leq \sqrt{6}$$

Vậy : R lớn nhất $\Leftrightarrow R = \sqrt{6}$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin 2a}{\sqrt{2} \cos 2a} = -\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2a = -2$$

$$\Leftrightarrow 2a = \operatorname{arctg}(-2) + k\pi \quad \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2) + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Cách 2 : (dùng đạo hàm)

$$R^2 = \frac{4(\operatorname{tg} 2a - 1)^2}{(\operatorname{tg}^2 2a + 2)}$$

Đặt : $t = \operatorname{tg} 2a$

$$R^2 = \frac{4(t^2 - 2t + 1)}{t^2 + 2}$$

Đặt : $g(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + 2}$

$$g'(t) = \frac{2t^2 + 2t - 4}{(t^2 + 2)^2} \Rightarrow g'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

t	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
g'	+	0	-	0	+
g	1	$\frac{3}{2}$	0	1	

R lớn nhất $\Leftrightarrow t = -2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2a = -2$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(-2) + \frac{k\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Câu II :

Xác định tham số m để tổng bình phương các nghiệm của phương trình :

$$2\log_4(8x^2 - 2x + 2m - 4m^2) + \log_{0,5}(4x^2 + 2mx - 2m^2) = 0 \quad (1)$$

lớn hơn $\frac{1}{4}$.

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow \log_2(8x^2 - 2x + 2m - 4m^2) = \log_2(4x^2 + 2mx - 2m^2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8x^2 - 2x + 2m - 4m^2 = 4x^2 + 2mx - 2m^2 & (2) \\ 4x^2 + 2mx - 2m^2 > 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow 4x^2 - 2(m+1)x + 2m - 2m^2 = 0$$

$$\Delta = (m + 1)^2 - 4(2m - 2m^2)$$

$$\Leftrightarrow \Delta = 9m^2 - 6m + 1 = (3m - 1)^2$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{(m + 1) - (3m - 1)}{4} = \frac{2 - 2m}{4} = \frac{1 - m}{2} \\ x_2 = \frac{(m + 1) + (3m - 1)}{4} = m \end{cases}$$

Để thỏa điều kiện đề bài ta phải có :

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{4} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 2mx_1 - 2m^2 > 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} 4x_2^2 + 2mx_2 - 2m^2 > 0 \end{cases} \quad (6)$$

$$(4) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(1 - m)^2 + m^2 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 + 4m^2 > 1$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$(5) \Leftrightarrow (1 - m)^2 + m(1 - m) - 2m^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow -2m^2 - m + 1 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < \frac{1}{2}$$

$$(6) \Leftrightarrow 4m^2 + 2m^2 - 2m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0$$

Vậy: $\begin{cases} -1 < m < 0 \\ \frac{2}{5} < m < \frac{1}{2} \end{cases}$

Câu II :

$$\frac{1 + \cos B}{\sin B} = \frac{2a + c}{\sqrt{4a^2 - c^2}} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(1 + \cos B)^2}{\sin^2 B} = \frac{(2a + c)^2}{4a^2 - c^2} \Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2a + c}{2a - c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + \cos B}{1 - \cos B} = \frac{2 \sin A + \sin C}{2 \sin A - \sin C}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin A - \sin C + 2 \sin A \cos B - \sin C \cos B = 2 \sin A + \sin C - 2 \sin A \cos B - \sin C \cos B$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin C = 4 \sin A \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A + B) = 2 \sin A \cos B$$

$$\Leftrightarrow \sin(A - B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A = B$$

$$\Leftrightarrow \text{Tam giác ABC cân.}$$

Câu IV :

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 & (1) \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 & (1) \\ x^2 - 2(a - 1)x + a(a - 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

Ta xét dấu x và $(x^2 - 5x + 4)$

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$
x		0	+	+	+
$x^2 - 5x + 4$	+	+	0	-	+

$$* \quad |x^2 - 5x + 4| - 9x^2 - 5x + 4 + 10x|x| = 0 \quad (1)$$

TH1 : $x < 0$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - 9x^2 + 5x + 4 - 10x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 18x^2 + 10x - 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{4}{9} \text{ (loại)} \end{cases}$$

TH2 : $0 \leq x \leq 1$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 - 9x^2 - 5x - 4 + 10x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ (loại)} \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases}$$

$$TH3: 1 < x < 4$$

$$(1) \Leftrightarrow -x^2 + 5x - 4 - 9x^2 - 5x + 4 + 10x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1) \text{ có nghiệm } 1 \leq x \leq 4.$$

$$TH4: 4 \leq x$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 1 & (\text{loại}) \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\text{Vậy:} \quad (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$* \quad x^2 - 2(a-1)x + a(a-2) = 0$$

$$\Delta' = (a-1)^2 - a(a-2) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a-2 \\ x_2 = a \end{cases}$$

$$TH1: x_1 = -1 \Rightarrow a-2 = -1 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow x_2 = 1$$

Hệ có 2 nghiệm là -1 và 1. Vậy $a = 1$: loại.

$$TH2: x_1 < 1 < x_2 < 4 \Leftrightarrow a-2 < 1 < a < 4$$

$$\Leftrightarrow 1 < a < 3$$

$$TH3: 1 < x_1 < 4 < x_2$$

$$1 < a-2 < 4 < a \Leftrightarrow 4 < a < 6$$

$$TH4: x_2 = -1 \Rightarrow a = -1 \Rightarrow x_1 = -3$$

Hệ có nghiệm là -1, vậy $a = -3$: nhận.

$$TH5: x_1 = 4 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow x_2 = 6$$

Hệ có nghiệm là 4, vậy $a = 6$: nhận.

$$TH6: x_2 = 4 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow x_1 = 2$$

Hệ có 2 nghiệm là 2 và 4, vậy $a = 4$: loại.

$$TH7: x_1 = 1 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow x_2 = 3$$

Hệ có 2 nghiệm là 1 và 3, vậy $a = 3$: loại.

Kết luận : để hệ có nghiệm duy nhất ta phải có :

$$\begin{cases} a = 1 \\ 1 < a < 3 \\ 4 < a < 6 \end{cases}$$

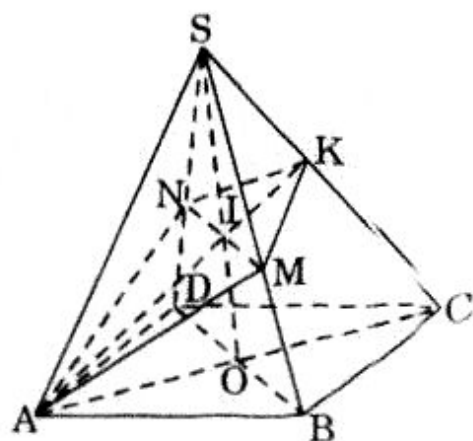
Câu V :

1. Chứng minh rằng :

$$\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3.$$

Đặt : $\frac{SM}{SB} = x ; \quad \frac{SN}{SD} = y$

Ta có : $\frac{V_{SAMK}}{V_{SABC}} = x \cdot \frac{1}{2}$



$$\Rightarrow V_2 = V_{SAMK} = V_{SABK} \cdot x \cdot \frac{1}{2} \cdot V_2 = \frac{V}{4} x$$

Tương tự ta có :

$$V_3 = V_{SANK} = \frac{V}{4} \cdot y$$

$$V_4 = V_{SAMN} = \frac{V}{2} \cdot x \cdot y$$

$$V_5 = V_{SMKN} = \frac{V}{4} \cdot x \cdot y$$

Ta có : $V_1 = V_{SAMKN} = V_2 + V_3 = V_4 + V_5$

$$\Rightarrow \frac{V}{4} x + \frac{V}{4} y = \frac{V}{2} xy + \frac{V}{4} xy \Rightarrow x + y = 3xy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3 \quad (1) \Rightarrow \frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$$

2. $\frac{V_1}{V} = \frac{1}{4} (x + y)$

$$(1) \Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$$

$$x + y = x + \frac{x}{3x-1} = \frac{3x^2}{3x-1}$$

$$\text{Đặt : } f(x) = \frac{3x^2}{3x-1}$$

Do $M \in |MB|$ (M_0 là trung điểm SB).

$$\text{Ta có : } \frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

Ta khảo sát hàm số :

$$f(x) = \frac{3x^2}{3x-1} \quad \text{với } x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right].$$

$$f'(x) = \frac{9x^2 - 6x}{(3x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	1
f'	-	0	+
f	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$

$$\text{Vậy : } \text{Max } \frac{V_1}{V} = \frac{3}{2}; \quad \text{Min } \frac{V_1}{V} = \frac{4}{3}.$$

Câu VI :

$$11. \text{ Chứng minh rằng } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n dx}{1+x} = 0.$$

Ta có : $\forall x \in [0; 1]$

$$0 \leq \frac{x^n}{1+x} \leq x^n \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$$

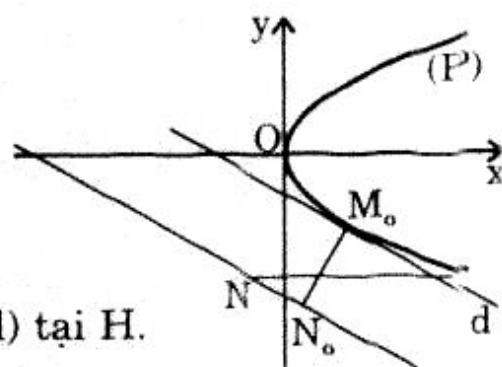
$$\int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0$$

2.

- a) Gọi (d) là tiếp tuyến với (P) và song song với (Δ), (d) tiếp xúc với (P) tại M_0 . Gọi N_0 là hình chiếu của M_0 lên (Δ).



Xét : $M \in (D), N \in (\Delta), MN$ cắt (d) tại H.

Ta có : $MN \geq NH \geq M_0N_0$

Vậy : M_0 và N_0 là hai điểm cần tìm.

Ta có : (d) : $4x + 3y + C = 0$

$$(d) \text{ tiếp xúc với } (P) \Leftrightarrow B^2p = 2AC$$

$$\Leftrightarrow 9 \times 32 = 2 \times 4 \times C \Leftrightarrow C = 36$$

$$\Rightarrow (d) : 4x + 3y + 36 = 0$$

Gọi $M_0(x_0; y_0)$

Phương trình (d) có dạng :

$$y_0y = 32(x + x_0) \Leftrightarrow 32x - y_0y + 32x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{32}{4} = \frac{-y_0}{3} = \frac{32x_0}{36} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -24 \\ x_0 = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_0(9; -24).$$

Gọi (d') là đường thẳng qua M và vuông góc với (d), ta có :

$$(d') : 3x - 4y + C' = 0$$

$$\begin{aligned}
M_0 \in (d') &\Rightarrow 27 + 96 + C' = 0 \\
&\Rightarrow C' = -123 \\
&\Rightarrow (d') : 13x - 4y - 123 = 0
\end{aligned}$$

N_0 có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x + 3y + 46 = 4 \\ 3x - 4y - 123 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{37}{5} \\ y = \frac{-126}{5} \end{cases}$$

Vậy : $N_0 \left(\frac{37}{5}; \frac{-126}{5} \right)$.

b) Hiển nhiên $M_0 N_0 \perp (d)$.

Đề 23

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}.$$

2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 10 - 5k$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt, nhận $I(5; 10)$ là trung điểm.

3. Biện luận theo tham số a số nghiệm $x < 0$ của phương trình :

$$\frac{x^2 - 2|x| + 9}{|x| - 2} = a(x - 2) + 2$$

Câu II :

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg} x \cdot \cot y = 1 \end{cases}$$

2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số :

$$y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x + 2}$$

Câu III :

Cho bất phương trình : $\log_2(\sqrt{x^2 + 1}) < \log_2(ax + a)$

1. Giải bất phương trình khi $a = -2$.
2. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình có nghiệm.

Câu IV :

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi các đường :

$$y = 0 ; \quad y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin x} ; \quad x = 0 ; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

Câu V :

Cho 2 đường thẳng có phương trình :

$$(d_1) : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2}$$

$$(d_2) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2}$$

1. Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) .
2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng chứa (d_1) và (d_2) .

Câu VI :

Cho góc nhọn $\widehat{xOy}$, I là một điểm nằm trong góc $\widehat{xOy}$ và thuộc đường phân giác của góc này. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (xOy) tại O lấy một điểm S cố định ($S \neq O$), (P) là mặt phẳng qua SI và cắt Ox tại B , Oy tại C . Gọi H là hình chiếu vuông góc của O xuống SI .

1. Với giá trị nào của BC thì OH vuông góc với mặt phẳng (SBC) ?
2. Gọi E là hình chiếu vuông góc của O xuống (SBC) . Với vị trí nào của BC thì E thuộc mặt phẳng (SOB) ?
3. Trường hợp $\widehat{xOy} = \frac{\pi}{3}$; $OI = \frac{\sqrt{3}}{3}$; $OS = 1$; $OB = \frac{1}{2}$, hãy tính SC .

Giải

Câu 1:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = \frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2}$$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x - 2)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1		2		5		$+\infty$
f'	+	0	-		-	0	+	
f	$-\infty$	$\nearrow$ -4 (CĐ)	$\searrow$ $-\infty$		$+\infty$	$\searrow$ 8 (CT)	$\nearrow$ $+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty :$$

Tiệm cận đứng : $x = 2$.

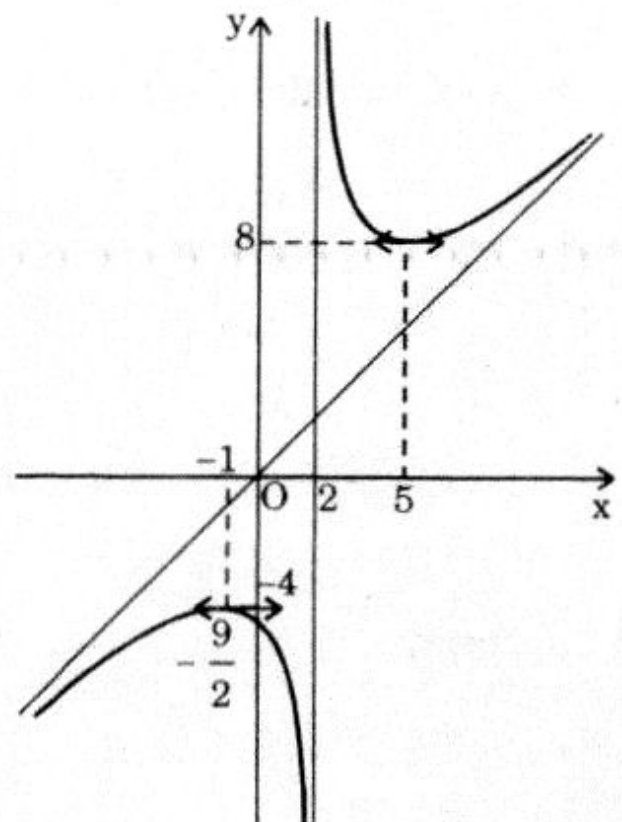
$$f(x) = x + \frac{9}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x - 2} = 0 :$$

Tiệm cận xiên : $y = x$.

Điểm đặc biệt : $x = 0$; $y = -\frac{9}{2}$.

Đồ thị : (hình)



2. Tìm k để đường thẳng $y = kx + 10 - 5k$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt, nhận $I(5; 10)$ là trung điểm.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C) :

$$\frac{x^2 - 2x + 9}{x - 2} = kx + 10 - 5k$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 9 = kx^2 + 10x - 5kx - 2kx - 20 + 10k$$

$$\Leftrightarrow (k - 1)x^2 + (12 - 7k)x + 10k - 29 = 0$$

$$\Delta = (12 - 7k)^2 - 4(k - 1)(10k - 29)$$

$$\Delta = 9k^2 - 12k + 28 > 0, \quad \forall k$$

I là trung điểm của $M_1(x_1; y_1) : M_2(x_2; y_2)$.

$$\Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 5 \quad \Rightarrow \quad \frac{7k - 12}{2(k - 1)} = 5$$

$$\Leftrightarrow 7k - 12 = 10k - 10 \quad \Leftrightarrow \quad k = -\frac{2}{3}$$

Vậy : $k = -\frac{2}{3}$.

3. Biện luận theo tham số a số nghiệm $x < 0$ của phương trình :

$$\frac{x^2 - 2|x| + 9}{|x| - 2} = a(x - 2) + 2 \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2x + 9}{-x - 2} = a(x - 2) + 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 9 = -ax^2 + 2ax - 2x - 2ax + 4a - 4$$

$$\Leftrightarrow (a + 1)x^2 + 4x + 13 - 4a = 0$$

TH1 : $a = -1$

$$(1) \Leftrightarrow 4x + 17 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{17}{4} \text{ (nhận)}$$

TH2 : $a \neq -1$

$$\Delta' = 4 - (a + 1)(13 - 4a) = 4a^2 - 9a - 9$$

$$\begin{cases} a_1 = \frac{9-15}{8} = -\frac{3}{4} \\ a_2 = \frac{9+15}{8} = 3 \end{cases}$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{13 - 4a}{a + 1}$$

$$S = -\frac{4}{a + 1}$$

a	4	P	S	x_1, x_2 so với 0	Số nghiệm của (1)
$+\infty$	+	-	-	$x_1 < 0 < x_2$	1
$\frac{13}{4}$		0		$x_1 < x_2 = 0$	1
	+	+	-	$x_1 < x_2 < 0$	2
3	0			$x_1 = x_2 < 0$	1
	-	+	-	VÔ NGHIỆM	0
$-\frac{3}{4}$	0			$x_1 = x_2 < 0$	1
	+	+	-	$x_1 < x_2 < 0$	2
-1		0	0	$x_0 < 0$	1
	+	-	+	$x_1 < 0 < x_2$	1
$-\infty$					

Câu II :

$$1. \text{ Giải hệ phương trình : } \begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -\frac{1}{2} & (1) \\ \operatorname{tg} x \cdot \cot y = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin y \neq 0 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)] = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin(x+y) + \sin(x-y) = -1$$

$$(2) \Leftrightarrow \sin x \cdot \cos y = \cos x \cdot \sin y \Leftrightarrow \sin(x-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y = k\pi$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin(x+y) = -1$$

$$x + y = -\frac{\pi}{2} + l2\pi$$

$$\begin{cases} x - y = k\pi \\ x + y = -\frac{\pi}{2} + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + (2l+k)\frac{\pi}{2} \\ y = -\frac{\pi}{4} + (2l-k)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad l, k \in \mathbb{Z}$$

2. Tìm giá trị lớn nhất và bé nhất của hàm số :

$$y = \frac{x^2 + 3}{x^2 - x + 2}$$

$$\text{MXD : } D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x^2 - x + 2)}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f	1	$\frac{6}{7}$	2	1	

Vậy : GTLN của $y = 2$; GTNN của $y = \frac{6}{7}$.

Câu III :

Cho bất phương trình : $\log_2(\sqrt{x^2 + 1}) < \log_2(ax + a)$

1. Giải bất phương trình khi $a = -2$.

$$\begin{aligned} \log_2 \sqrt{x^2 + 1} < \log_2(-2x - 2) &\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} < -2x - 2 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} -2x - 2 > 0 \\ x^2 + 1 < 4x^2 + 4 + 8x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 3x^2 + 8x + 3 > 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x < \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} \text{ hay } x > \frac{-4 + \sqrt{7}}{3} \end{cases} &\Leftrightarrow x < \frac{-4 - \sqrt{7}}{3} \end{aligned}$$

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để bất phương trình có nghiệm.

$$\log_2 \sqrt{x^2 + 1} < \log_2(ax + a) \quad (1)$$

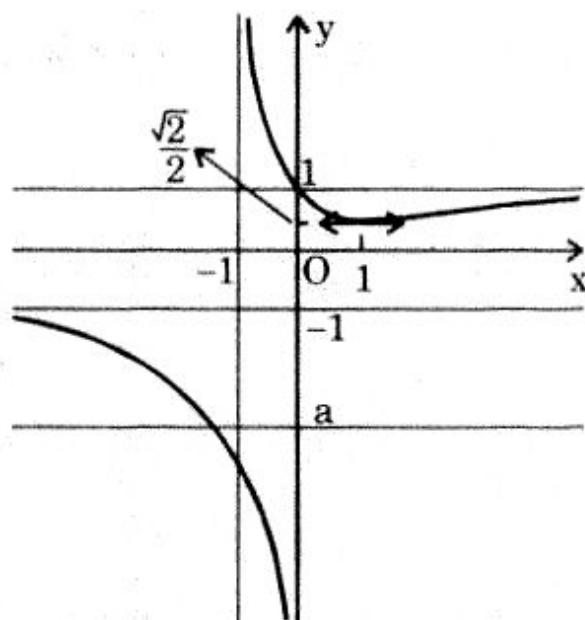
$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 1} < ax + a \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} < a \\ x > -1 \\ \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1} > a \\ x < -1 \end{cases}$$

Đặt : $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x + 1}$

$$f'(x) = \frac{\frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2+1}(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'			0	
f	-1	$+\infty$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1

Đồ thị :



Theo đồ thị, để bất phương trình có nghiệm, điều kiện cần và

đủ là :

$$\begin{cases} a > \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a < -1 \end{cases}$$

Câu IV :

Tính thể tích của khối tròn xoay tạo nên khi ta quay quanh trục Ox hình phẳng S giới hạn bởi các đường :

$$y = 0 ; \quad y = \sqrt{\cos^2 x + x \sin x} ;$$

$$x = 0 ; \quad x = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + x \sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1 + \cos 2x}{2} + x \sin x \right] dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) x \cos x + \sin x \right] \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi \left[\frac{\pi}{4} + 1 \right] \text{ (đvtt)}. \end{aligned}$$

Câu V :

$$(d_1) : \frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{-2} ; \quad (d_2) : \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{2} .$$

1. Tìm tọa độ giao điểm của (d_1) và (d_2) .

Ta có phương trình tham số của (d_1) và (d_2) là :

$$(d_1) : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 2t + 1 \\ z = -2t + 3 \end{cases} ; \quad (d_2) : \begin{cases} x = t' \\ y = t' + 1 \\ z = 2t' - 3 \end{cases}$$

Giao điểm của (d_1) và (d_2) ứng với giá trị của hai tham số t, t' xác định bởi hệ :

$$\begin{cases} 3t - 1 = t' \\ 2t + 1 = t' + 1 \\ -2t + 3 = 2t' - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t' = 2 \end{cases}$$

Vậy : (d_1) cắt (d_2) tại $A(2; 3; 1)$.

2. Lập phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) chứa (d_1) và (d_2) .

Ta có : $\vec{a}_{d_1} = (3; 2; -2)$; $\vec{a}_{d_2} = (1; 1; 2)$; $\vec{n}_\alpha = (A; B; C)$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{n}_\alpha \perp \vec{a}_{d_1} \\ \vec{n}_\alpha \perp \vec{a}_{d_2} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 2B - 2C = 0 \\ A + B + 2C = 0 \end{cases}$$

Cho : $A = 6 \Rightarrow B = -8, C = 1$

Vậy phương trình tổng quát của mặt phẳng (α) là :

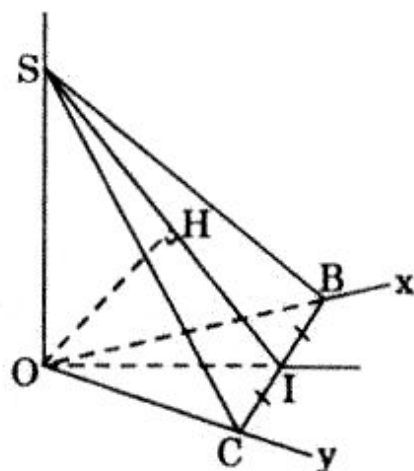
$$6(x - 2) - 8(y - 3) + (z - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6x - 8y + z + 11 = 0$$

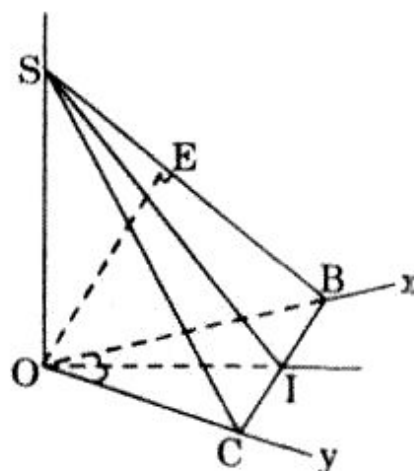
câu VI :

$$1. OH \perp (SBC) \Rightarrow OH \perp BC \Leftrightarrow OI \perp BC \quad (h.1)$$

$$\begin{aligned} 2. E \in (SOB) &\Leftrightarrow E \in SB \Leftrightarrow BC \perp SB \\ &\Leftrightarrow BC \perp Ox \quad (h.2) \end{aligned}$$



(Hình 1)



(Hình 2)

$$3. dt(\triangle BOC) = dt(\triangle COI) + dt(\triangle BOI)$$

$$\frac{1}{2} OB \cdot OC \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} OC \cdot OI \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot OB \cdot OI \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow OB \cdot OC \sqrt{3} = OC \cdot OI + OB \cdot OI$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot OC \sqrt{3} = OC \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow OC = 1 \quad \Rightarrow SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow SC = \sqrt{2}$$

Đề 24

Câu 1:

Gọi (C_m) là đồ thị hàm số: $y = \frac{2x^2 + mx + m}{x + 1}$.

- Vẽ đồ thị (C_{-1}) ứng với $m = -1$. Từ đó suy ra đồ thị (Γ) của hàm số $y = \frac{|x - 1|(2x + 1)}{x + 1}$.
- Xác định các giá trị của m sao cho qua điểm $A(0; 1)$ không có đường thẳng nào tiếp xúc với (C_m) .

3. Xác định các giá trị của m để (C_m) cắt Ox tại hai điểm và hai tiếp tuyến tại hai điểm đó vuông góc với nhau.

Câu II :

Cho tam giác ABC , R , r là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp; h_A và l_A là đường cao và phân giác trong xuất phát từ đỉnh A .

1. Chứng tỏ rằng : $\frac{h}{l_A} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$
2. Cho góc $C = \frac{\pi}{2}$, I là tâm đường tròn nội tiếp, l_B là phân giác trong của góc B .

Chứng minh rằng : $l_A \cdot l_B = 2 \cdot IA \cdot IB$

Câu III :

1. Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta có :

$$2^{\sin x} + 2^{\tan x} > 2^{\frac{3x}{2}} + 1$$

2. Giải phương trình : $2\log_3(\cot x) = \log_2(\cos x)$.

Câu IV :

1. Tính : $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \quad n \in \mathbf{N}$.

Từ kết quả đó chứng tỏ rằng :

$$1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$$

2. Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ trục chuẩn, xét hình bị chặn phía dưới bởi parabol $y = x^2$, bị chặn phía trên bởi đường thẳng đi qua điểm $(1; 4)$ và có hệ số góc k . Xác định k để hình nói trên có diện tích nhỏ nhất.

Câu V :

Cho tứ diện ABCD.

1. Chứng tỏ rằng các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện là đồng qui tại điểm G.
2. Nếu điểm G trùng với tâm hình cầu nội tiếp, chứng tỏ rằng các mặt của tứ diện là bằng nhau.

Giải

Câu I :

$$y = \frac{2x^2 + mx + m}{x + 1}.$$

1. Vẽ đồ thị (C_{-1}) ứng với $m = -1$. Từ đó suy ra đồ thị (Γ) của hàm số : $y = \frac{|x - 1|(2x + 1)}{x + 1}$.

$$m = -1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 1}$$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 4x}{(x + 1)^2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	$\nearrow$ -9 (CD)	$\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ (CT) -1	$\nearrow$ $+\infty$	

Tiệm cận đứng : $x = -1$.

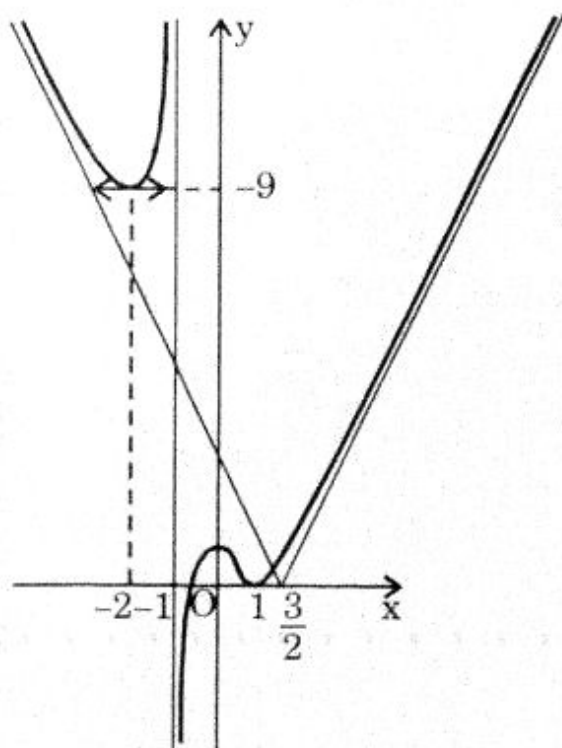
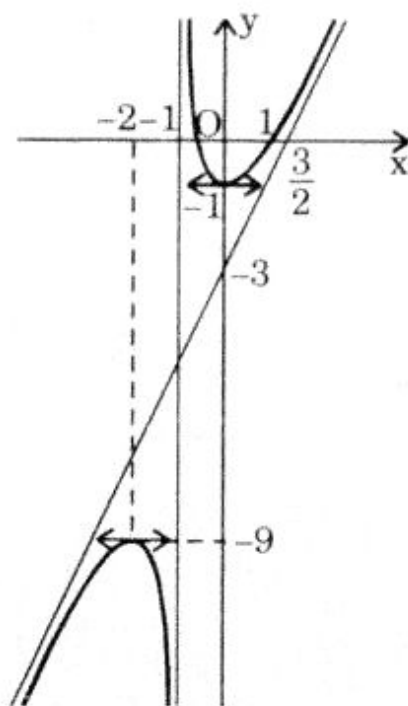
Tiệm cận xiên : $y = 2x - 3$.

Đồ thị (C_{-1}) : (hình)

Ta có : $(C_{-1}): y = \frac{(x-1)(2x+1)}{x+1}$

$$(\Gamma) : y = \frac{|x-1|(2x+1)}{x+1}$$

Đồ thị (Γ) suy ra từ đồ thị của (C) bằng cách giữ nguyên phần có $x > 1$ và lấy đối xứng của phần có $x < 1$ qua Oy.



2. Xác định m sao cho qua $A(0; 1)$ không có đường thẳng nào tiếp xúc với (C_m) .

Xét đường thẳng (d) đi qua $A(0; 1)$, phương trình của (d) có dạng :

$$(d) : y - 1 = k(x)$$

$$y = kx + 1$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C_m) .

$$kx + 1 = \frac{2x^2 + mx + m}{x + 1} \quad (x \neq -1)$$

$$\Leftrightarrow kx^2 + (x) + kx + 1 = 2x^2 + mx + m$$

$$\Leftrightarrow (k - 2)x^2 + [(k + 1) - m]x + 1 - m = 0$$

$$(d) \text{ tiếp xúc với } (C_m) \Leftrightarrow \begin{cases} k \neq 2 \\ \Delta = 0 \end{cases}$$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow [k + 1 - m]^2 - 4(k - 2)(1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow (k + 1)^2 - 2m(k - 1) + m^2 - 4(1 - m)k + 8(1 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2(m - 1)k + m^2 - 10m + 9 = 0 \quad (1)$$

Để không có đường thẳng qua A và tiếp xúc với (C_m) , (1) phải vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' < 0 \\ 4 + 4(m - 1) + m^2 - 10m + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m - 1)^2 - m^2 + 10m - 9 < 0 \\ m^2 - 6m + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 8m - 8 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad m < 1$$

3. Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$2x^2 + mx + m = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có 2 nghiệm} \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của (1) ta có :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{m}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{2} \end{cases}$$

$$f'(x_1) = \frac{u'(x_1)v(x_1) - u(x_1)v'(x_1)}{[v(x_1)]^2} = \frac{u'(x_1)}{v(x_1)} \quad \text{vì } u(x_1) = 0$$

$$f'(x_1) = \frac{4x_1 + m}{x_1 + 1}$$

$$f'(x_2) = \frac{4x_2 + m}{x_2 + 1}$$

Hai tiếp tuyến tại $M_1(x_1; 0)$ và $M_2(x_2; 0)$ vuông góc

$$\Leftrightarrow f'(x_1) f'(x_2) = -1 \quad \Leftrightarrow \frac{(4x_1 + m)(4x_2 + m)}{(x_1 + 1)(x_2 + 1)} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{16x_1x_2 + 4m(x_1 + x_2) + m^2}{x_1x_2 + x_1 + x_2 + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{16\left(\frac{m}{2}\right) + 4m\left(\frac{-m}{2}\right) + m^2}{\frac{m}{2} + \left(\frac{-m}{2}\right) + 1} = -1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 - \sqrt{17} & (\text{nhận}) \\ m = 4 + \sqrt{17} & (\text{nhận}) \end{cases}$$

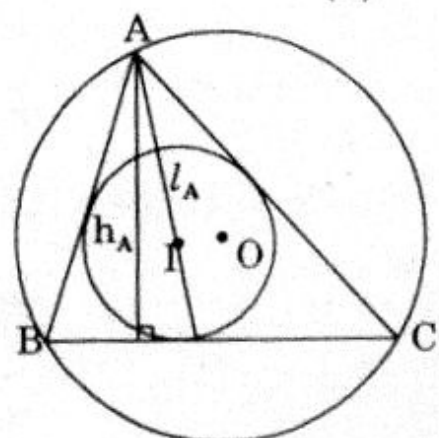
Câu II :

1. Chứng minh rằng : $\frac{h}{l_A} \geq \sqrt{\frac{2r}{R}}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{h_A^2}{l_A^2} \geq \frac{2r}{R} \quad (\text{h.1})$$

$$\Leftrightarrow \frac{4S^2}{a^2bc[(b+c)^2 - a^2]} \geq \frac{2S}{p \frac{abc}{4S}}$$

$$\Leftrightarrow \pi \cdot abc(b+c)^2 \geq 2a^2bc[(b+c)^2 - a^2] \quad \text{Hình 1}$$



$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \geq 4a(b+c-a)$$

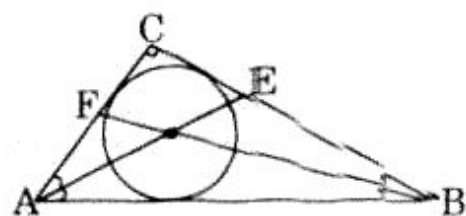
$$\Leftrightarrow [b+c-2a]^2 \geq 0 \quad (2)$$

(2) đúng $\Rightarrow$ (1) đúng.

2. Chứng minh rằng : $l_A.l_B = 2.IA.IB$ (h.2)

$$\text{Ta có : } l_A = AE = \frac{b}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{c \sin B}{\cos \frac{A}{2}}$$

$$l_B = BF = \frac{a}{\cos \frac{B}{2}} = \frac{c \sin A}{\cos \frac{B}{2}}$$



Hình 2

$$\Rightarrow l_A.l_B = 4c^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2}$$

$$\text{Ta có : } \widehat{AIB} = 180^\circ - \frac{B+C}{2} = 135^\circ$$

$$\frac{AI}{\sin \frac{B}{2}} = \frac{BI}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{c}{\sin 135^\circ} = c\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow AI.BI = 2c^2 \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \Rightarrow l_A.l_B = 2IA.IB$$

Câu III :

1. Chứng minh rằng với $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ta có :

$$2^{\sin 2x} + 2^{\text{tg} x} > 2^{\frac{3x}{2}} + 1 \quad (1)$$

Theo Cauchy ta có :

$$\begin{aligned} 2^{\sin 2x} + 2^{\text{tg} x} &\geq \sqrt{2^{2 \sin x} \cdot 2^{2 \text{tg} x}} \\ &\geq 2^{1 + \frac{2 \sin x + \text{tg} x}{2}} \end{aligned}$$

Ta chỉ cần chứng minh :

$$1 + \frac{2\sin x + \operatorname{tg} x}{2} > \frac{3x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2\sin x + \operatorname{tg} x > 3x$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x > 0$$

$$\text{Đặt : } f(x) = 2\sin x + \operatorname{tg} x - 3x$$

$$f'(x) = 2\cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3$$

$$= \cos x + \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3 \geq 3\sqrt[3]{\cos^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} - 3 = 0$$

$$\Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ tăng } \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$x > 0 \Rightarrow f(x) > f(0) = 0$$

$$\Rightarrow (2) \text{ đúng } \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

$$2. \text{ Giải phương trình : } 2\log_3(\cot g x) = \log_2(\cos x) \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cot g x > 0 \\ \cos x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x > 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\text{Đặt : } 2\log_3(\cot g x) = \log_2 \cos x = y < 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = 2^y \\ \cot g^2 x = 3^y \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } \cot g^2 x = \frac{\cos^2 x}{1 - \cos^2 x}$$

$$\text{Suy ra : } 3^y = \frac{4^y}{1 - 4^y} \Leftrightarrow 3^y - 12^y = 4^y$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^y = 3^y + 1 \quad (2)$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} f(y) = \left(\frac{3}{4}\right)^y \\ g(y) = 3^y + 1 \end{cases}$$

Ta có $f(y)$ là hàm tăng khi $y < 0$, $g(y)$ là hàm giảm khi $y < 0$.

Mặt khác : $f(-1) = g(-1)$

Vậy : (2) $\Leftrightarrow y = -1$

Suy ra : $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Do điều kiện ban đầu nên ta chỉ nhận nghiệm :

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu IV :

1. Tính : $\int_0^1 (1-x^2)^n dx; \quad n \in \mathbb{N}.$

Đặt : $u = (1-x^2)^n \Rightarrow du = n(1-x^2)^{n-1}(-2x)dx$
 $dv = dx \Rightarrow v = x$

$$I_n = x(1-x^2)^n \Big|_0^1 - 2n \int_0^1 (-x^2)(1-x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = -2n \int_0^1 (1-x^2-1)(1-x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = -2n \int_0^1 (1-x^2)^n dx + 2n \int_0^1 (1-x^2)^{n-1} dx$$

$$I_n = -2nI_n + 2nI_{n-1}$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

$$\text{Mà : } I_0 = \int_0^1 dx = 1$$

$$\text{Vậy : } I_n = \frac{2n}{2n+1} \frac{(2n-2)}{2n-1} \dots \frac{2}{3} \cdot I_0$$

$$\Rightarrow I_n = \frac{2.4.6 \dots (2n-2)2n}{1.3.5 \dots (2n-1)2n+1}$$

Mặt khác ta lại có :

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^1 (1 - x^2)^n dx \\
&= \int_0^1 \left[1 - C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 - \dots + (-1)^n C_n^n x^{2n} \right] dx \\
&= \left[x - \frac{C_n^1 x^3}{3} + \frac{C_n^2 x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{C_n^n x^{2n+1}}{2n+1} \right]_0^1 \\
\Rightarrow I_n &= \frac{C_n^1}{3} - \frac{C_n^2}{5} + \frac{C_n^3}{7} - \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1}
\end{aligned}$$

Vậy : $1 - \frac{C_n^1}{3} + \frac{C_n^2}{5} - \frac{C_n^3}{7} + \dots + \frac{(-1)^n C_n^n}{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot (2n-2) \cdot 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)}$

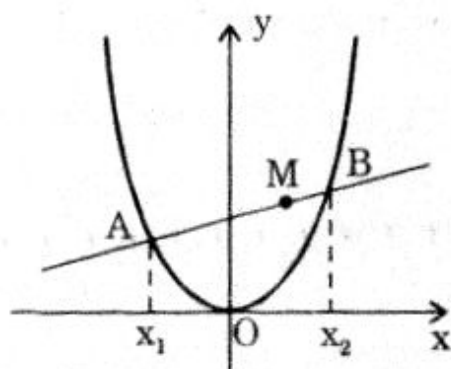
2. Phương trình đường thẳng (d) đi qua điểm M(1; 4) và có hệ số góc K.

$$y = K(x - 1) + 4$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$x^2 = K(x - 1) + 4$$

$$x^2 - Kx + K - 4 = 0 \quad (1)$$



Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (1) ($x_1 < x_2$).

Ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = K \\ x_1 x_2 = K - 4 \end{cases} \Rightarrow x_2 - x_1 = \sqrt{K^2 - 4K + 16}$

$$S = \int_{x_1}^{x_2} [K(x - 1) + 4 - x^2] dx$$

$$\begin{cases} MO \parallel KD \\ NO \parallel CH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (MON) \Rightarrow MN \perp AB$$

Vậy : đường vuông góc chung của AB và CD đi qua trung điểm của CD. Tương tự nó cũng đi qua trung điểm của AB.

$$\begin{aligned} \left. \begin{array}{l} MA = MB \\ MH = MK \end{array} \right\} &\Rightarrow HB = KA \Rightarrow \Delta CHB = \Delta DKA \\ &\Rightarrow BC = AD \end{aligned}$$

Tương tự : $AC = BD$; $AB = CD$.

Vậy : các mặt của tứ diện là các tam giác bằng nhau.

Đề 25

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{x^2 + 5x + 15}{x + 3}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.
2. Tìm điểm thuộc đồ thị sao cho tọa độ của điểm đó là các số nguyên.
3. Tìm điểm M thuộc đồ thị sao cho khoảng cách từ M tới trục hoành gấp hai lần khoảng cách từ M tới trục tung.

Câu II :

1. Chứng tỏ rằng nếu : $\sin 2A + \sin 2B = 4 \sin A \cdot \sin B$
thì tam giác ABC là tam giác vuông.
2. Giải phương trình : $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x$.

Câu III :

Giải bất phương trình : $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4$

Câu IV :

1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin 8x$
2. Cho hai điểm $P(2; 5)$ và $Q(5; 1)$. Lập phương trình đường thẳng qua P sao cho khoảng cách từ Q đến đường thẳng đó bằng 3.

Câu V :

Cho hai điểm A, B đối xứng nhau qua mặt phẳng P , I là giao điểm của AB với P , O là một điểm nằm ngoài P , có hình chiếu vuông góc xuống P là H . M là một điểm chạy trên đường tròn đường kính IH vẽ trong P .

1. Chứng minh rằng IM là đường vuông góc chung của AB và OM .
2. Chứng minh rằng hai điểm A, B luôn cách đều đường OM .
3. Cho $AB = 2a$, $MH = x$, $MI = y$. Tính thể tích tứ diện $OMAE$. Xác định vị trí M để thể tích đó lớn nhất.

Giải**Câu I :**

$$y = \frac{x^2 + 5x + 15}{x + 3}$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

$$\text{MXĐ : } D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 6x}{(x + 3)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-6	-3	0	$+\infty$	
f'	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	-7	$+\infty$	5	$+\infty$	

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty :$$

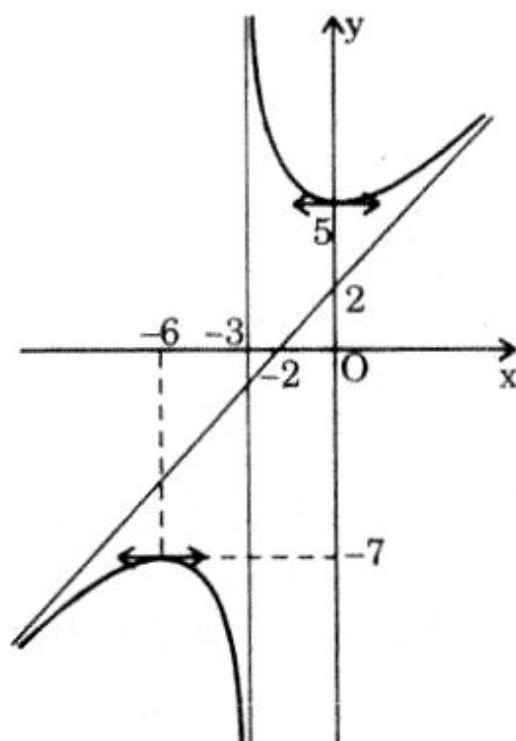
tiệm cận đứng : $x = -3$.

$$y = x + 2 + \frac{9}{x+3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9}{x+3} = 0 :$$

tiệm cận xiên : $y = x + 2$.

Đồ thị hàm số : (hình)



2. $y = x + 2 + \frac{9}{x+3}$

$$y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{9}{x+3} \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow (x+3) \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 9\}$$

Ta được các điểm sau :

x	-12	-6	-4	-2	0	6
y	-11	-7	-11	9	5	9

3. $M(x; y)$ có tọa độ là nghiệm của hệ :
$$\begin{cases} y = \frac{x^2 + 5x + 15}{x+3} \\ |y| = 2|x| \end{cases}$$

$$TH1 : \begin{cases} y = x^2 + 5x + \frac{15}{x-3} \\ y = 2x \end{cases}$$

Ta được hai điểm : $M_1 \left(\frac{-1 - \sqrt{61}}{2}; -1 - \sqrt{61} \right)$

$$M_2 \left(\frac{-1 + \sqrt{61}}{2}; -1 + \sqrt{61} \right)$$

$$TH2 : \begin{cases} y = \frac{x^2 + 5x + 15}{x + 3} \\ y = -2x \end{cases} \quad \text{Hệ vô nghiệm.}$$

Câu II :

1. Chứng tỏ rằng nếu : $\sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \cdot \sin B$ thì $\triangle ABC$ là một tam giác vuông.

$$\text{Ta có : } \sin 2A + \sin 2B = 4\sin A \sin B$$

$$\Leftrightarrow \cos(A+B)\cos(A-B) = 2[\cos(A-B) - \cos(A+B)]$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B)\sin C = \cos(A-B) + \cos C$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B)[1 - \sin C] + \cos C = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos(A-B) \left[\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right]^2 + \cos^2 \frac{C}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right] \left[\cos(A-B) \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) + \left(\cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \right] = 0$$

$$\text{Ta có : } \cos(A-B) \left(\cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right) + \left(\cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} \right) \geq$$

$$\geq \cos \frac{C}{2} + \sin \frac{C}{2} - \left| \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} \right| > 0$$

$$\left(\text{Do } \cos \frac{C}{2} > 0 \text{ và } \sin \frac{C}{2} > 0 \right)$$

$$\text{Vậy : } \cos \frac{C}{2} - \sin \frac{C}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{C}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

Vậy : tam giác ABC vuông tại C.

$$2. \quad (\cos 4x - \cos 2x)^2 = 5 + \sin 3x \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 3x \cdot \sin^2 x = 5 + \sin 3x$$

Ta có :
$$\begin{cases} 4 \sin^2 3x \cdot \sin^2 x \leq 4 \\ 5 + \sin 3x \geq 4 \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \sin^2 3x \cdot \sin^2 x = 4 \\ 5 + \sin 3x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = -1 & (2) \\ \sin^2 x = 1 & (3) \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + K\pi \quad (K \in \mathbb{Z})$$

Thế vào (2) ta chỉ nhận nghiệm : $x = \frac{\pi}{2} + 2K\pi \quad (K \in \mathbb{Z})$

Câu III :

Giải bất phương trình : $5\sqrt{x} + \frac{5}{2\sqrt{x}} < 2x + \frac{1}{2x} + 4 \quad (1)$

Điều kiện : $x > 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 5\left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) < 2\left(x + \frac{1}{4x}\right) + 4$$

Đặt : $t = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Điều kiện : $t \geq 2\sqrt{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \sqrt{2}$

$$(1) \Leftrightarrow 5t < 2(t^2 - 1) + 4 \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t < \frac{1}{2} \text{ (loại)} \\ t > 2 \end{cases} \Leftrightarrow t > 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} > 2 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x} + 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < \sqrt{x} < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < \frac{3}{2} - \sqrt{2} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{2} < x \end{cases}$$

Câu IV :

1. Tìm họ nguyên hàm của hàm số : $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin 8x$

Ta có : $f(x) = \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x) \sin 8x$

$$= \frac{1}{8}(\sin 11x + \sin 5x) + \frac{3}{8}(\sin 9x + \sin 7x)$$

$$\Rightarrow F(x) = f'(x) = \frac{-1}{88} \cos 11x - \frac{1}{40} \cos 5x - \frac{3}{72} \cos 9x - \frac{3}{56} \cos 7x + C$$

2. Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $P(2; 5)$ có dạng :

$$(\Delta_1) : y = Kx + 5 - 2K \quad \text{hoặc} \quad (\Delta_2) : x = 2$$

Ta có : $d(Q, \Delta_2) = |5 - 2| = 3$

Vậy : (Δ_2) thỏa điều kiện đề bài.

$$d(Q, \Delta_1) = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|5K - 1 + 5 - 2K|}{\sqrt{1 + K^2}} = 3$$

$$\Leftrightarrow |3K + 4| = 3\sqrt{1 + K^2}$$

$$\Leftrightarrow 9K^2 + 24K + 16 = 9(K^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow 24K = -7 \quad \Leftrightarrow K = -\frac{7}{24}$$

Vậy : $(\Delta_2) : y = -\frac{7}{24}x + 5 + \frac{7}{12} \Leftrightarrow 7x + 24y - 134 = 0$

Kết luận : có hai đường thẳng thỏa điều kiện của đề bài :

$$(\Delta_1): 7 + 24 - 134 = 0$$

$$(\Delta_2) : x - 2 = 0.$$

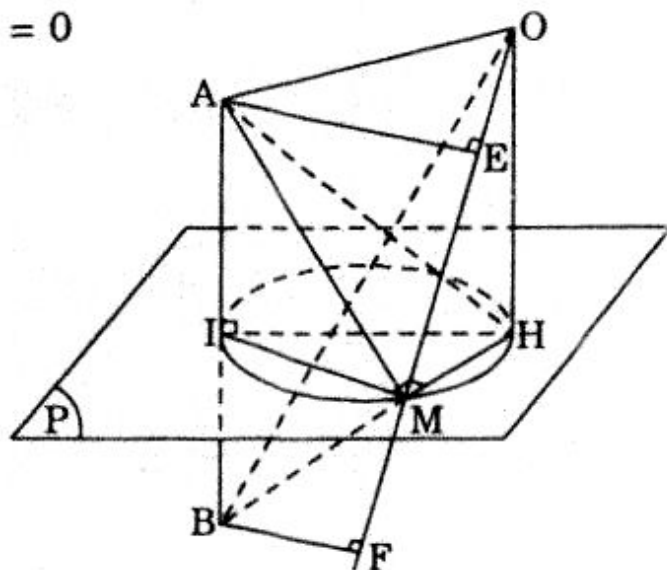
Câu V :

1. $AB \perp (P)$

$$\Rightarrow AB \perp IM$$

MH ⊥ IM

$$\Rightarrow OM \perp IM.$$



Vậy : IM là đường vuông góc chung của AB và OM.

2. Dựng : $AE \perp OM$ tại E

$BF \perp OM$ tại F

Ta đã có : $IM \perp OM$

$\Rightarrow$ AE, IM, BF nằm trong 3 mặt phẳng song song.

$$\Rightarrow \frac{ME}{MF} = \frac{IA}{IB} = 1 \Rightarrow ME = MF$$

Tam giác MAB cân

$$\Rightarrow MA = MB \Rightarrow \triangle MAE = \triangle MBF \Rightarrow AE = BF$$

Vậy : hai điểm A, B luôn cách đều đường thẳng OM.

$$3. \quad V = V_{OMAB} = V_{HMAB} = \frac{1}{3} MH \cdot S_{\triangle ABM}$$

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot IM \cdot MH = \frac{1}{6} \cdot 2a \cdot xy = \frac{1}{3} axy$$

Ta có : $x^2 + y^2 = IH^2 = \text{const}$

$$V \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow xy \text{ lớn nhất.}$$

$$\Leftrightarrow x = y \Leftrightarrow \widehat{MI} = \widehat{MH}$$

Đề 26

Câu 1 :

Cho hàm số : $y = x^4 + ax^2 + b$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi :

$$a = \frac{3}{10}, b = 1.$$

2. Giả sử đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại 4 điểm có hoành độ lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng khi đó $9a^2 - 100b = 0$.

Câu II :

1. a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác với $a > b > c$. Xác định độ dài x để $a + x, b + x, c + x$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông.
2. ABC là tam giác vuông tại A , $\widehat{ABC} = \alpha$. Tính tỉ số các bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đó theo α . Xác định α để tỉ số đó đạt giá trị bé nhất.

Câu III :

1. Giải và biện luận theo α hệ phương trình :

$$\begin{cases} x - y = \alpha \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4 \cos^2(x - y) \end{cases}$$

2. Chứng minh rằng nếu $|x| < 1$ và n là một số nguyên lớn hơn 1, thì ta có bất đẳng thức :

$$(1 + x)^n + (1 - x)^n < 2^n.$$

Câu IV :

Trong không gian cho hai đường thẳng $(\Delta_1), (\Delta_2)$ có phương trình:

$$(\Delta_1) : \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases} ; \quad (\Delta_2) : \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Viết phương trình các mặt phẳng I và Q song song với nhau và lần lượt đi qua (Δ_1) và (Δ_2) .
2. Tính khoảng cách giữa (Δ_1) và (Δ_2) .
3. Viết phương trình đường thẳng (Δ) song song với trục Oz và cắt cả hai đường thẳng (Δ_1) và (Δ_2) .

Câu V :

Cho một mặt cầu (S) tâm O tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại I . M là một điểm di động trên (S) . Hai tiếp tuyến của (S) tại M cắt (P) ở A và B .

1. Chứng minh rằng $\widehat{AMB} = \widehat{AIB}$.

2. I' là điểm đối xứng của I qua AB . Chứng minh rằng bốn điểm I, I', M, O cùng nằm trên một mặt phẳng và $I'M$ đi qua một điểm cố định J thuộc (S) .
3. Cho M di động trên (S) nhưng sao cho $\widehat{AMB} = \frac{\pi}{2}$, các điểm A, B lần lượt chạy trên hai đường thẳng d, d' nằm trong (P) và d, d' vuông góc với nhau tại K . Hãy chứng tỏ rằng khi đó mặt cầu đường kính AB luôn chứa một đường tròn cố định, I' chạy trên một đường thẳng cố định, và M di động trên một đường tròn cố định.

Giải

Câu 1:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số

$$y = f(x) = x^4 + ax^2 + b$$

Khi : $a = \frac{3}{10}, b = 1.$

$$\Rightarrow f(x) = x^4 + \frac{3}{10}x^2 + 1$$

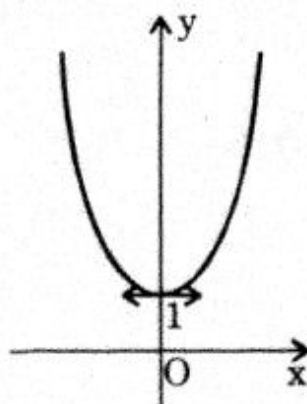
MXĐ : $D = \mathbb{R}.$

$$f'(x) = 4x^3 + \frac{3}{5}x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(20x^2 + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'		$-$	$+$
f	$+\infty$	1	$+\infty$

Đồ thị :



2. Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và Ox.

$$x^4 + ax^2 + b = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } t = x^2, \quad \text{ta có : } t^2 + at + b = 0 \quad (2)$$

Gọi t_1 và t_2 là hai nghiệm của (2), ta có :

$$\begin{cases} t_1 t_2 = b \\ t_1 + t_2 = -a \end{cases}$$

Theo giả thiết $-\sqrt{t_2}, -\sqrt{t_1}, \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2}$ tạo thành một cấp số cộng nên ta có :

$$\sqrt{t_2} = 3\sqrt{t_1} \Rightarrow t_2 = 9t_1 \Rightarrow t_1 + 9t_1 = -a$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = -\frac{a}{10} \\ t_2 = -\frac{9a}{10} \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{a}{10}\right)\left(-\frac{9a}{10}\right) = b$$

$$\Rightarrow 9a^2 - 100b = 0$$

Câu II :

1. $a > b > c$,

Ta có : $a + x, b + x, c + x$ là độ dài ba cạnh của một tam giác vuông

$$\Leftrightarrow (a + x)^2 = (b + x)^2 + (c + x)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(b + c - a)x + b^2 + c^2 - a^2 = 0$$

$$\Delta' = (b + c - a)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)$$

$$= 2a^2 + 2bc - 2ba - 2ca$$

$$= 2a(a - b) + 2c(b - a) = 2(a - b)(a - c)$$

$$\begin{cases} x_1 = (a - b - c) - \sqrt{\Delta'} \\ x_2 = (a - b - c) + \sqrt{\Delta'} \end{cases}$$

$$\text{Ta có : } f(0) = b^2 + c^2 - a^2.$$

$$\text{Để cho : } x_2 > 0 \Leftrightarrow f(0) < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 < a^2.$$

Vậy độ dài x cần tìm là :

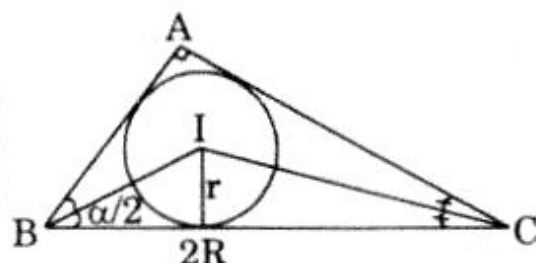
$$x = a - b - c + \sqrt{2(a-b)(a-c)}$$

(với điều kiện $b^2 + c^2 < a^2$)

2. Ta có :

$$2R = r \cotg \frac{\alpha}{2} + r \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{1}{2} \left[\cotg \frac{\alpha}{2} + \cotg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right) \right]$$



$$\Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{2 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)} = \frac{1}{\sqrt{2} \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) - 1}$$

$$\frac{R}{r} \text{ đạt Min} \Leftrightarrow \cos \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Min } \frac{R}{r} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$$

Câu III :

$$1. \begin{cases} x - y = \alpha \\ 2(\cos 2x + \cos 2y) = 1 + 4 \cos^2(x - y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \alpha \\ 4 \cos \alpha \cdot \cos(x + y) = 1 + 4 \cos^2 \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \alpha \\ (2 \cos \alpha - \cos(x + y))^2 + \sin^2(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \alpha \\ \sin^2(x + y) = 0 \\ 2 \cos \alpha = \cos(x + y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = \alpha \\ \begin{cases} \cos(x + y) = 1 \\ \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x + y) = -1 \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$TH 1: \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x + y) = 1$$

$$\Rightarrow x + y = k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = k2\pi \\ x - y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} + k\pi \\ y = -\frac{\alpha}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$TH 2: \cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(x + y) = -1$$

$$\Rightarrow x + y = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y = \pi + k2\pi \\ x - y = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} + (2k + 1)\frac{\pi}{2} \\ y = -\frac{\alpha}{2} + (2k + 1)\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Cho $|x| < 1; n > 1$.

Chứng minh rằng: $(1 + x)^n + (1 - x)^n < 2^n$

Đặt: $f(x) = (1 + x)^n + (1 - x)^n, \quad x \in (-1; 1)$

$$f'(x) = n(1 + x)^{n-1} - n(1 - x)^{n-1}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	1	0	1
f'	-	0	+
f	2^n	1	2^n

Vậy: $f(x) < 2^n$.

Câu IV :

$$(\Delta_1): \begin{cases} x - 8z + 23 = 0 \\ y - 4z + 1 = 0 \end{cases}; \quad (\Delta_2): \begin{cases} x - 2z - 3 = 0 \\ y + 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

1. Phương trình của một mặt phẳng đi qua (Δ_1) :

$$P(\alpha): (x - 8z + 23) + \alpha(y - 4z + 10) = 0$$

$$P(\alpha): x + \alpha y - (8 + 4\alpha)z + (23 + 10\alpha) = 0$$

Phương trình của một mặt phẳng đi qua (Δ_2) :

$$Q(\beta) : (x - 2z - 3) + \beta(y + 2z + 2) = 0$$

$$Q(\beta) : x + \beta y + (-2 + 2\beta)z + (-3 + 2\beta) = 0$$

$$P(\alpha) // Q(\beta) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ -8 - 4\alpha = -2 + 2\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

Vậy : $(P) : x - y - 4z + 13 = 0$

$$(Q) : x - y - 4z - 5 = 0$$

2. Lấy $M(0; 1; 3) \in (P)$.

Ta có : $d(P, Q) = d(M, Q) = \frac{|-1 - 12 - 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 4^2}} = 3\sqrt{2}$

3. Trong phương trình của $P(\alpha)$ ta chọn $\alpha = -2$, ta được (P) :

$$x - 2y + 3 = 0$$

(P) là mặt phẳng qua (Δ_1) và song song với Oz .

Trong phương trình của $Q(\beta)$ ta chọn $\beta = 1$, ta được (Q) :

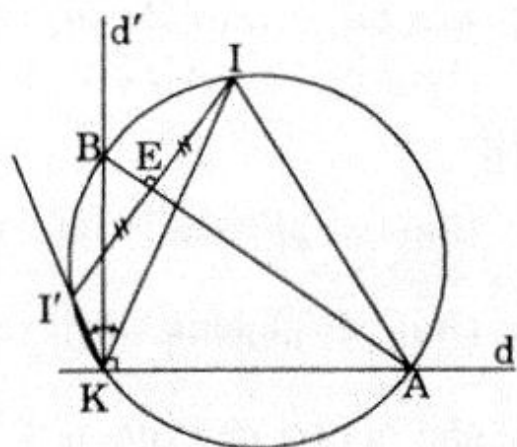
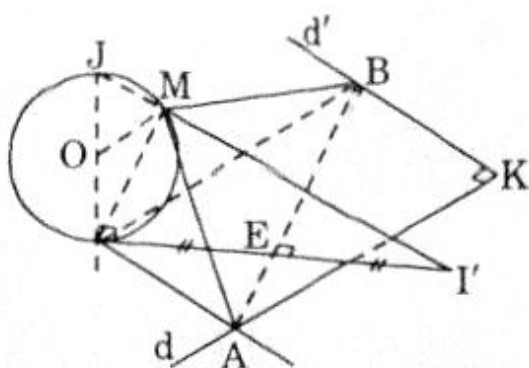
$$x + y - 1 = 0$$

(Q) là mặt phẳng qua (Δ_2) và song song với Oz . Suy ra phương trình của đường thẳng (Δ) cần tìm là :

$$(\Delta) : \begin{cases} x - 2y + 3 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

Câu V :

1. Ta có : $\begin{cases} AM = AI \\ BM = BI \end{cases} \Rightarrow \Delta MAB = \Delta IAB \Rightarrow \widehat{AMB} = \widehat{AIB}$



2. Ta có : $OM \perp AB$

$OI \perp AB$

$OI' \perp AB$

$\Rightarrow$ Bốn điểm I, I', M, O cùng nằm trên một mặt phẳng (α) đi qua O và vuông góc với AB.

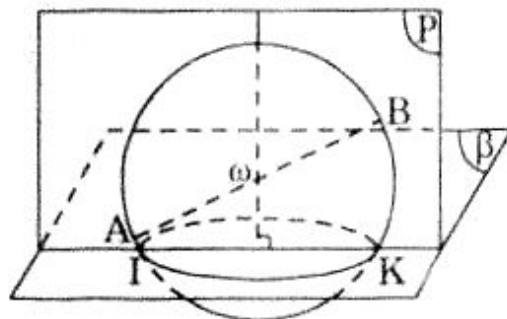
I'M cắt một mặt cầu tại J.

$$ME = \frac{II'}{2} \Rightarrow \widehat{IMI'} = \frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow$ J đối xứng với I qua O. Vậy J cố định.

3. Mặt cầu đường kính AB luôn chứa đường tròn cố định (C) đường kính KI nằm trong mặt phẳng (β) vuông góc với (P), I' chạy trên đường thẳng Kx sao cho d' là phân giác góc $\widehat{IKx}$.

M di động trên đường tròn (T) cố định là giao của (S) và mặt phẳng (JKI').



Đề 27

Câu I :

Cho hàm số : $y = x^3 - 3x^2 - 9x + m$.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 0$
2. Xác định m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Câu II :

Cho bất phương trình : $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$.

1. Giải bất phương trình với $m = \frac{1}{2}$.
2. Với giá trị nào của m thì bất phương trình có nghiệm.

Câu III :

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \cot x = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{tg} y + \cot y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

2. Chứng minh rằng với mọi x, y ta luôn có :

$$x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0.$$

Câu IV :

Tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx \quad (a, b \neq 0)$

Câu V :

Cho hai điểm $A(3\cos t, 0)$ và $B(0, 2\sin t)$.

Tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ sao cho :

$$2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{0} \quad (\text{khi } t \text{ thay đổi})$$

Câu VI :

Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật $ABCD$. Gọi (Q) là mặt phẳng vuông góc với (P) và chứa AB .

1. Chỉ rõ cách dựng quỹ tích K của điểm M luôn nhìn các đoạn AB và AD dưới một góc vuông.
2. Đường thẳng DM cắt (Q) tại M' . Tìm quỹ tích của M' .
3. Mặt phẳng chứa K cắt CD tại I , đường thẳng IM cắt K tại điểm thứ hai N . Đường thẳng DN cắt (Q) tại N' . Chứng tỏ rằng $M'N' \parallel AB$.

Giải

Câu I :

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + m.$$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số ứng với $m = 0$

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$$

$$\text{MXD : } D = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

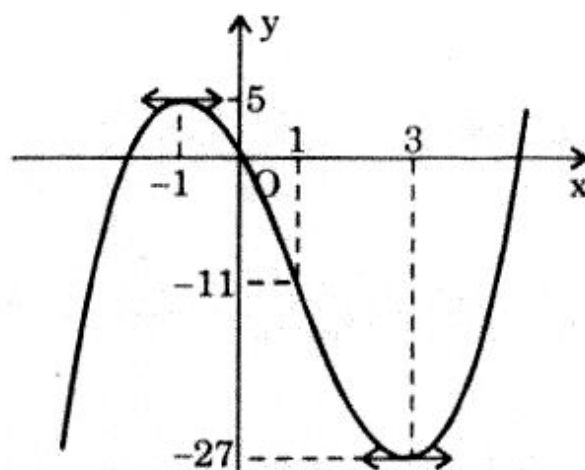
x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$	
f'		+	0	-	0	+
f			5		-27	$+\infty$

$$f''(x) = 6x - 6$$

$$\Rightarrow f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$f(1) = -11 \Rightarrow \text{điểm uốn } A(1; -11)$$

Đồ thị :



2. Xác định m để đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt với các hoành độ lập thành một cấp số cộng.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$x^3 - 3x^2 - 9x + m = 0 \quad (1)$$

Để (1) có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 ta phải có :

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x^2 + (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - \\
 &\quad - x_1x_2x_3 = 0 \quad (2)
 \end{aligned}$$

So sánh (1) và (2) ta có : $x_1 + x_2 + x_3 = -3$

Để x_1, x_2, x_3 tạo thành một cấp số cộng ta có :

$$x_1 + x_3 = x_2 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$

Thay vào (1) ta được : $m = -5$.

Thử lại thấy điều kiện đề bài được thỏa.

Vậy : $m = 5$.

Câu II :

Cho bất phương trình : $mx - \sqrt{x-3} \leq m+1$ (1)

1. Giải bất phương trình với $m = \frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}x - \sqrt{x-3} \leq \frac{1}{2} + 1 \Leftrightarrow x - 3 \leq 2\sqrt{x-3} \quad (1)$$

Điều kiện : $x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 4(x-3) \Leftrightarrow (x-3)(x-7) \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow 3 \leq x \leq 7
 \end{aligned}$$

Vậy : nghiệm của (1) là : $3 \leq x \leq 7$.

2. Với giá trị nào của m thì bất phương trình có nghiệm.

Đặt : $t = \sqrt{x-3} \quad (x \geq 3, t \geq 0)$

$$\Rightarrow x = t^2 + 3$$

$$(1) \Leftrightarrow m(t^2 + 3) - t - m - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow mt^2 - t + 2m - 1 \leq 0 \quad (2)$$

(1) có nghiệm $x \Leftrightarrow$ (2) có nghiệm $t \geq 0$.

a) Nếu $m = 0$:

$$(2) \Leftrightarrow -t - 1 \leq 0 \quad ; \quad (2) \text{ đúng } \forall t \geq 0.$$

b) Nếu $m < 0$:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = -\infty$$

Với : $f(t) = mt^2 - t + 2m - 1$

Vậy : (2) có nghiệm $t \geq 0$.

c) Nếu $m > 0$:

$$f(t) \text{ có : } \Delta = -8m^2 + 4m + 1$$

Để (2) có nghiệm trước hết cần có :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$$

Khi đó : $t_1 + t_2 = \frac{1}{m} > 0$

Vậy : (2) có nghiệm t thỏa : $t_1 \leq t \leq t_2$ với $t_2 > 0$.

Vậy : (2) có nghiệm $t \geq 0$.

Kết luận : (1) có nghiệm khi $m \leq \frac{1 + \sqrt{3}}{4}$.

Câu III :

1. Giải hệ phương trình :

$$(I) \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x + \cot x = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \\ \operatorname{tg} y + \cot y = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cos x \cdot \sin x \neq 0 \\ \cos y \cdot \sin y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq K \frac{\pi}{2} \\ y \neq K \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (K \in \mathbb{Z})$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} = 2 \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) \\ \frac{1}{\sin y \cdot \cos y} = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \cdot \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \\ \sin 2y \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \quad (1)$$

(2)

TH1 :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + e\pi \\ y = \frac{\pi}{4} + K2\pi \end{cases} \quad (e, K \in \mathbb{Z})$$

Thay vào (2) ta thấy không thỏa.

TH2 :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = -1 \\ \sin\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + e\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + K2\pi \end{cases} \quad (e, K \in \mathbb{Z})$$

Thay vào (2) chỉ thỏa khi e là số lẻ.

Vậy : nghiệm của hệ phương trình là :

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + (2m+1)\pi \\ y = -\frac{3\pi}{4} + K2\pi \end{cases} \quad (m \in \mathbb{Z})$$

$$2. \quad x^2(1 + \sin^2 y) + 2x(\sin y + \cos y) + 1 + \cos^2 y > 0, \quad \forall x, y \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \Delta'_x = (\sin y + \cos y)^2 - (1 + \sin^2 y)(1 + \cos^2 y) < 0, \quad \forall y$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 y \cdot \cos^2 y + 2\sin y \cdot \cos y - 1 < 0, \quad \forall y$$

$$\Leftrightarrow -(\sin 2y - 2)^2 < 0 \quad (2)$$

(2) đúng với $\forall y$.

Vậy : (1) đúng với $\forall x, y$.

Câu IV :

Tính : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx \quad (a, b \neq 0)$

TH1 : $a^2 = b^2$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cdot \cos x dx}{\sqrt{a^2}} = \frac{1}{2|a|} \sin^2 x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2|a|}$$

TH2 : $a^2 \neq b^2$

Đặt : $t = a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x$

$$\Rightarrow dt = 2(b^2 - a^2) \sin x \cdot \cos x \cdot dx$$

$$I = \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \int_{a^2}^{b^2} \frac{dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{b^2 - a^2} \sqrt{t} \Big|_{a^2}^{b^2}$$

$$I = \frac{|b| - |a|}{b^2 - a^2} = \frac{1}{|a| + |b|}$$

Kết luận : $I = \frac{1}{|a| + |b|}$

Câu V :

$A(3\cos t, 0); \quad B(0, 2\sin t).$

Gọi (L) là tập hợp các điểm $M(x; y)$ sao cho :

$$2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Ta có : $M(x; y) \in (L) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} + 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - 6\cos t = 5x \\ 2y = 5y - 10\sin t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2\cos t \\ y = \frac{10}{3}\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{100}{9}} = 1 \quad (1)$$

Vậy : (L) là một elip có phương trình (1).

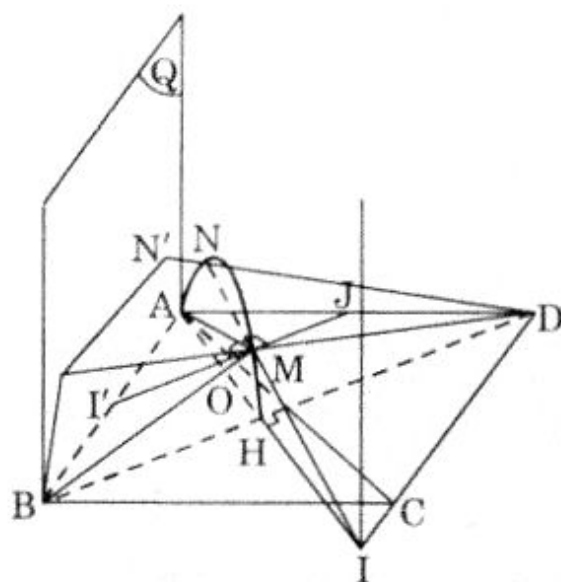
Câu VI :

$$1. \quad \begin{cases} \widehat{AMB} = 90^\circ \\ \widehat{AMD} = 90^\circ \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Quỹ tích M là đường tròn (K) giao của hai mặt cầu đường kính AB và AD.

Cách dựng :

Gọi I', J là trung điểm của AB, AD. Qua A dựng mặt phẳng (α) vuông góc với I'J tại O, (K) là đường tròn tâm O bán kính OA trong mặt phẳng (α).



$$2. \text{ Ta có : } \left. \begin{array}{l} AM \perp MH \\ AM \perp BD \end{array} \right\} \Rightarrow AM \perp (MHD)$$

$$\Rightarrow AM \perp BM'$$

$$\left. \begin{array}{l} BM' \perp AM \\ BM' \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow BM' \perp (AM'D)$$

$$\Rightarrow BM' \perp AM'$$

Vậy : M' lưu động trên đường tròn đường kính AB trong mặt phẳng (Q).

$$3. \text{ Ta có : } \left. \begin{array}{l} CD \parallel AB \\ (MCD) \cap (Q) = M'N' \end{array} \right\} \Rightarrow M'N' \parallel AB \parallel CD.$$

Đề 28

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{ax^2 + (2a+1)x + a+3}{x+2}$ (1) với $a \neq -1$.

1. Chứng minh tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) luôn đi qua

một điểm cố định.

2. Với giá trị nào của a thì đồ thị của (1) tiếp xúc với đường thẳng $y = a + 4$?

Câu II :

Cho phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$

1. Giải phương trình khi $m = 9$.
2. Xác định tham số m để phương trình đã cho có nghiệm.

Câu III :

1. Bằng cách đổi biến $t = \tan x$, giải phương trình :

$$\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$$

2. Chứng minh rằng bất phương trình :

$$\sin x \cdot (\cos^2 x + \sin 2x) + \sin 3x < 9 \cdot \cos^3 x$$

được thỏa mãn với mọi $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu IV :

1. Tính : $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$

2. Với các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số đôi một khác nhau, trong đó chữ số đầu tiên phải khác 0.

Câu V :

Cho đường tròn (C) có đường kính $AB = 2R$. Trên nửa đường thẳng Ax vuông góc với mặt phẳng chứa (C) tại A lấy điểm S sao cho $AS = h$. Gọi M là một điểm lưu động trên (C). Mặt phẳng (P) đi qua A và vuông góc với SB cắt SB, SM lần lượt ở H, K.

1. Chứng minh $AK \perp (SBM)$ và điểm K chạy trên một đường tròn cố định khi M thay đổi.

2. Tính thể tích hình chóp SAHK trong trường hợp M là trung điểm của cung AB.

Câu VI :

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ trục chuẩn Oxy, cho họ đường tròn :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx - 2(1 - m)y + 2m^2 - 2m - 3 = 0.$$

1. Tìm quỹ tích tâm của đường tròn (C_m) .
2. Cho $m = 2$ và điểm $A(0; 3)$. Viết phương trình các tiếp tuyến của (C_2) kẻ từ A.

Giải

Câu I :

$$y = \frac{ax^2 + (2a + 1)x + a + 3}{x + 2} \quad (C) \quad (a \neq -1)$$

1. Ta có : $f(x) = ax + 1 + \frac{a+1}{x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a+1}{x+2} = 0.$$

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên : (d) : $y = ax + 1$

Ta thấy (d) luôn đi qua $M(0; 1)$ cố định.

2. (C) luôn tiếp xúc với (D) : $y = a + 4$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (D) :

$$\frac{ax^2 + (2a + 1)x + a + 3}{x + 2} = ax + 1 \quad (x \neq -2)$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + (a - 3)x - a - 5 = 0 \quad (2)$$

Đặt : $g(x) = ax^2 + (a - 3)x - a - 5$

(D) tiếp xúc với (C) $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm kép khác -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = 0 \\ g(-2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 3)^2 + 4a(a + 5) = 0 \\ 4a - 2(a - 3) - a - 5 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 + 14a + 9 = 0 \\ a + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a = -\frac{9}{5}$$

Vậy để (C) tiếp xúc với (D) ta phải có : $a = -\frac{9}{5}$.

Câu II :

Cho phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 9$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + 9}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = -x^2 + 9x + 9 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 2\sqrt{x(9-x)} = x(9-x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ 4(x)(9-x) = x^2(9-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ x(9-x)[4 + x(x-9)] = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = 9 \vee x = \frac{9 \pm \sqrt{65}}{2}.$$

2. Xác định tham số m để phương trình có nghiệm.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x} + \sqrt{9-x} = \sqrt{-x^2 + 9x + m}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ x + 9 - x + 2\sqrt{x(9-x)} = x(9-x) + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 9 \\ m = -x(9-x) + 2\sqrt{x(9-x)} + 9 \end{cases}$$

Đặt : $t = \sqrt{x(9-x)} \geq 0$

Ta có : $t' = \frac{-2x + 9}{2\sqrt{x(9-x)}}$

x	0	$\frac{9}{2}$	9
t'		+	0
t			-
	0	$\frac{9}{2}$	0

Vậy : $0 \leq t \leq \frac{9}{2}$.

(1) $\Leftrightarrow m = -t^2 + 2t + 9$ (2)

Đặt : $f(t) = -t^2 + 2t + 9$

Ta có : $f'(t) = -2t + 2$

t	0	1	$\frac{9}{2}$
f'(t)		+	0
f(t)			-
	0	10	$-\frac{9}{4}$

(1) có nghiệm x $\Leftrightarrow$ (2) có nghiệm t $\in \left[0; \frac{9}{2}\right]$

$\Leftrightarrow -\frac{9}{4} \leq m \leq 10.$

Câu III :

1. Bằng cách đổi biến $t = \tan x$, giải phương trình :

$\sin x \cdot \sin 2x + \sin 3x = 6\cos^3 x$ (1)

Ta có :

(1) $\Leftrightarrow 2\sin^2 x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x = 6\cos^3 x$

Do $\cos x = 0$ không thỏa (1) nên ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 4\operatorname{tg}^3 x = 6$$

Đặt : $t = \operatorname{tg} x$

Ta có :

$$(1) \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 3t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t - 2)(t^2 - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = \pm\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \operatorname{arctg}(2) + k\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pm\frac{\pi}{3} + k'\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

2. $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Chứng minh rằng :

$$\sin x \cdot (\cos^2 x + \sin 2x) + \sin 3x < 9 \cos^3 x \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow \sin x \cos^2 x + 2\sin^2 x \cos x + 3\sin x - 4\sin^3 x < 9\cos^3 x$$

Với $x = \frac{\pi}{2}$, ta có : $(1) \Leftrightarrow -1 < 0$ (đúng).

Vậy : ta chỉ cần xét $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right)$

Khi đó : $(1) \Leftrightarrow \operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) - 4\operatorname{tg}^3 x < 9$

Đặt : $t = \operatorname{tg} x$, ta có : $t \in [0, +\infty)$

$$(1) \Leftrightarrow -t^3 + 2t^2 + 4t < 9$$

Đặt : $f(t) = -t^3 + 2t^2 + 4t$

$$f'(t) = -3t^2 + 4t + 4$$

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

t	0	2	$+\infty$
f'	+	0	-
f	0	8	$-\infty$

$$\Rightarrow f(t) \leq 8 < 9$$

Vậy : (1) luôn đúng $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu IV :

1. Tính : $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$

• Đặt : $t = \sqrt{1-x} \Rightarrow x = 1-t^2, \quad dx = -2t \, dt$

• Đổi cận :

x	0	1
t	1	0

$$I = \int_1^0 (1-t^2)t \cdot (-2t) \, dt$$

$$\Leftrightarrow I = \int_0^1 (2t^4 - 2t^2) \, dt$$

$$\Leftrightarrow I = \left[\frac{2t^5}{5} - \frac{2t^3}{3} \right]_0^1$$

$$\Leftrightarrow I = (0) - \left[\frac{2}{5} - \frac{2}{3} \right] = \frac{4}{15}$$

Vậy : $\int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx = \frac{4}{15}$.

2. $x = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$n = x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4 \quad x_5$$

để n là số chẵn ta phải có $x_5 \in \{0, 2, 4, 6\}$

TH1 : $x_5 = 0$

x_1 có 6 cách chọn

x_2 có 5

x_3 có 4

x_4 có 3

Vậy số cách chọn n là $S_1 = 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 360$.

TH2 : $x_5 \in \{2, 4, 6\}$

x_5 có 3 cách chọn

x_1 có 5 cách chọn ($x_1 \neq x_5$ và $x_1 \neq 0$)

x_2 có 5

x_3 có 4

x_4 có 3

Vậy số cách chọn n là $S_2 = 3 \times 5 \times 5 \times 4 \times 3 = 900$.

Kết luận : Số các số chẵn thỏa đề bài là :

$$S = S_1 + S_2 = 1260.$$

Câu V :

1. Chứng minh $AK \perp (SBM)$ và điểm K chạy trên một đường tròn cố định khi M thay đổi.

Ta có : $SB \perp (AKH) \Rightarrow SB \perp AK$

Ta cũng có :

$$\left. \begin{array}{l} MB \perp MA \\ MB \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow MB \perp (SAM) \supset AK$$

$$\Rightarrow MB \perp AK$$

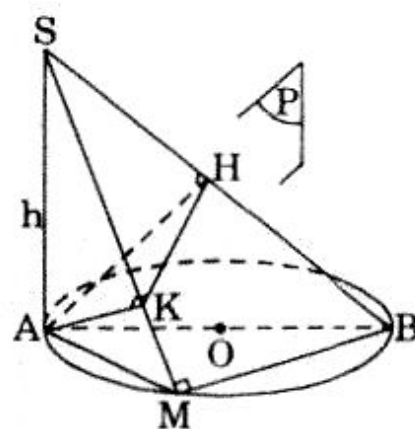
Do đó :

$$\left. \begin{array}{l} AK \perp SB \\ AK \perp MB \end{array} \right\} \Rightarrow AK \perp (SBM)$$

$$\text{Ta có : } AK \perp (SBM) \Rightarrow \begin{cases} AK \perp SB \\ AK \perp KH \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} K \in (P) \\ \widehat{AKH} = 90^\circ \end{cases} \quad [\text{qua A và vuông góc với SB tại H}]$$

$\Rightarrow$ K chạy trên đường tròn cố định (T) đường kính AH trong mặt phẳng (P).



2. Tính thể tích hình chóp SAHK trong trường hợp M là trung điểm của cung AB.

Ta có : $AM = R\sqrt{2}$

$$\begin{aligned}\frac{V_{SAHK}}{V_{SAMB}} &= \frac{SH}{SB} \cdot \frac{SK}{SM} = \frac{SH \cdot SB}{SB^2} \cdot \frac{SK \cdot SM}{SM^2} \\ &= \frac{h^2}{h^2 + 4R^2} \cdot \frac{h^2}{h^2 + 2R^2}\end{aligned}$$

Ta lại có :

$$\begin{aligned}V_{SAMB} &= \frac{1}{3} SA \cdot dt(\Delta AMB) = \frac{1}{3} \cdot h \cdot R^2 \\ \Rightarrow V_{SAHK} &= \frac{1}{3} \cdot h \cdot R^2 \frac{h^4}{(h^2 + 4R^2)(h^2 + 2R^2)} \\ \Rightarrow V_{SAHK} &= \frac{R^2 h^5}{3(h^2 + 4R^2)(h^2 + 2R^2)}\end{aligned}$$

Câu VI :

$$(C_m) : x^2 + y^2 - 2mx - 2(1-m)y + 2m^2 - 2m - 3 = 0.$$

1. Tọa độ tâm I của (C_m) là :

$$I \begin{cases} x = m & (1) \\ y = 1 - m & (2) \end{cases}$$

$$\text{Do : } a^2 + b^2 - c = m^2 + (1-m)^2 - 2m^2 + 2m + 3 = 4 > 0$$

Nên : $\forall m \in \mathbb{R}$, (C_m) luôn là đường tròn.

$$(1) \text{ và } (2) \Rightarrow y = -x + 1.$$

Vậy quỹ tích tâm của đường tròn (C_m) là đường thẳng (d) :

$$y = -x + 1.$$

2. Cho $m = 2$ ta có : $(C_2) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$

Ta có (C_2) là đường tròn tâm I(2; -1) và có bán kính $R = 2$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (D) qua A(0; 3) ta có :

$$(D) : y - 3 = k(x - 0) \Leftrightarrow kx - y + 3 = 0$$

$$(C_2) \text{ tiếp xúc với } (D) \Leftrightarrow d(I, D) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|2k + 1 + 3|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 2 \Leftrightarrow |2k + 4| = 2\sqrt{k^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow |k + 2| = \sqrt{k^2 + 1} \Leftrightarrow k^2 + 4k + 4 = k^2 + 1$$

$$\Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } (D) : y - 3 = -\frac{3}{4}x \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0$$

Xét trường hợp $(D) \perp Ox$. Khi đó (D) có dạng : $(D') : x = 0$.

$$\text{Ta có : } d(I, D') = \frac{|2|}{\sqrt{1 + 0}} = 2 = R$$

Vậy từ A ta kẻ được hai tiếp tuyến đến (C_2) là :

$$(D) : 3x + 4y - 12 = 0$$

$$(D') : x = 0$$

Đề 29

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = \frac{x+1}{x-2}$.
2. Tìm trên đồ thị hàm số điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.

Câu II :

1. Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$
2. Giải phương trình : $2^{x+1} - 4^x = x - 1$.

Câu III :

1. Giải phương trình : $2\operatorname{tg}x + \cot x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$.

2. Chứng minh rằng trong mọi ΔABC ta luôn có :

$$\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2}$$

Trong đó A, B, C là các góc, S là diện tích và p là nửa chu vi của tam giác.

Câu IV :

1. Tìm nguyên hàm của hàm số :

$$f(x) = \frac{\cos x + \sin x \cdot \cos x}{2 + \sin x}.$$

2. Cho Elip : $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng $(d) : x - \sqrt{2}y + 2 = 0$.

Đường thẳng (d) cắt Elip tại hai điểm B và C .

Tìm tọa độ điểm A trên Elip sao cho ΔABC có diện tích lớn nhất.

Câu V :

1. Giải phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$.

2. Giả sử x, y là những số dương thay đổi và thỏa mãn điều kiện: $x + y = 1$.

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức : $P = xy + \frac{1}{xy}$.

Giải

Câu I :

1. Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số : $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

- MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- $f'(x) = \frac{-3}{(x-2)^2}$.

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$		-	-
$f(x)$	1	$+\infty$	1

Arrows in the original image indicate that as x approaches 2 from the left, f(x) goes to +infinity, and as x approaches 2 from the right, f(x) goes to -infinity.

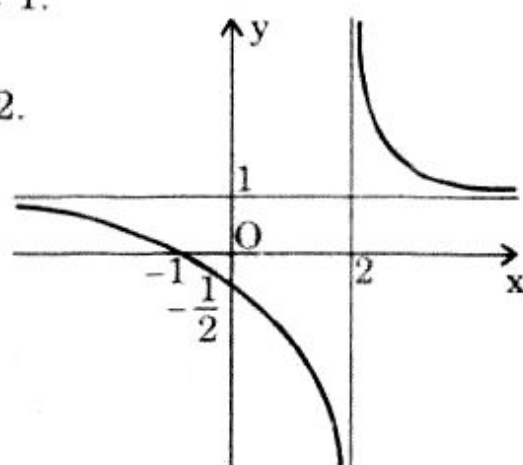
- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$: Tiệm cận ngang $y = 1$.

- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$: Tiệm cận đứng $x = 2$.

- Điểm đặc biệt :

$$x = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$$

$$y = 0 \Rightarrow x = -1.$$



- Đồ thị : (hình)

2. Tìm trên đồ thị hàm số điểm M sao cho tổng các khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất.

$$M(x; y) \in (H) \Leftrightarrow y = \frac{x+1}{x-2}$$

Đặt : $S = d(M, O_x) + d(M, O_y)$

$$\Rightarrow S = |y| + |x| = \left| \frac{x+1}{x-2} \right| + |x|$$

Do : $M_0\left(0; -\frac{1}{2}\right) \in (H)$

Ta có : $|x_0| + |y_0| = \frac{1}{2}$

Nên ta chỉ cần xét : $-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$

$$TH1 : 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$$

$$S(x) = -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + x$$

$$\Leftrightarrow S(x) = \frac{x^2 - 3x - 1}{x - 2}$$

$$S'(x) = \frac{x^2 - 4x + 7}{(x-2)^2} > 0, \quad \forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

Ta có :

x	0	$\frac{1}{2}$
S'(x)		+
S(x)		

$\frac{1}{2}$


$$TH2 : -\frac{1}{2} \leq x \leq 0$$

$$S(x) = -\left(\frac{x+1}{x-2}\right) - x$$

$$\Leftrightarrow S(x) = \frac{-x^2 + x - 1}{x - 2}$$

$$S'(x) = \frac{-x^2 + 4x - 1}{(x-2)^2} < 0, \quad \forall x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

Ta có :

x	$-\frac{1}{2}$	0
$S'(x)$		+
$S(x)$	$\nearrow \frac{1}{2}$	

$$\text{Vậy : } S \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow S = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Điểm M cần tìm là $M\left(0; -\frac{1}{2}\right)$.

Câu II :

1. Giải hệ phương trình :

$$(I) : \begin{cases} x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 9 \end{cases}$$

$$\text{Đặt : } \begin{cases} u = x + \frac{1}{x} \\ v = y + \frac{1}{y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + \frac{1}{x^2} = u^2 - 2 \\ y^2 + \frac{1}{y^2} = v^2 - 2 \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u^2 + v^2 = 13 \end{cases} \Rightarrow (u + v)^2 = 25$$

$$\Rightarrow uv = 6.$$

u, v là nghiệm của phương trình : $X^2 - 5X + 6 = 0$.

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$$

TH1 :

$$\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{x} = 2 \\ y + \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

TH2 : (Tương tự).

Vậy (I) có 4 nghiệm là :

$$\left(1, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right); \left(1, \frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}, 1\right); \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}, 1\right).$$

2. Giải phương trình : $2^{x+1} - 4^x = x - 1$ (1)

Đặt : $t = 2^x$ ($t > 0$)

(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2t + x - 1 = 0$

$\Delta' = 1 - x + 1 = 2 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$

(1) $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + \sqrt{2 - x} \\ t = 1 - \sqrt{2 - x} \end{cases}$

TH1 : $t = 1 + \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow 2^x = 1 + \sqrt{2 - x}$ (2)

Ta có : $f(x) = 2^x$ là hàm tăng

$g(x) = 1 + \sqrt{2 - x}$ là hàm giảm

$f(1) = g(1).$

Vậy : (2) $\Leftrightarrow x = 1.$

TH2 : $t = 1 - \sqrt{2 - x} \Leftrightarrow 2^x = 1 - \sqrt{2 - x}$ (3)

Điều kiện : $\begin{cases} 2 - x \geq 0 \\ 1 - \sqrt{2 - x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$

$$\forall x \in (1, 2] ; \quad h(x) = 2^x > h(1) = 2$$

$$g(x) = 1 - \sqrt{2-x} < g(2) = 1.$$

Vậy : (3) vô nghiệm.

Kết luận : (1) có nghiệm $x = 1$.

Câu III :

1. Giải phương trình : $2\operatorname{tg}x + \operatorname{cotg}x = \sqrt{3} + \frac{2}{\sin 2x}$ (1)

$$(1) \Leftrightarrow \frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} + \frac{1}{\sin x \cos x}$$

Điều kiện : $\sin x \cos x \neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin^2 x + \cos^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin^2 x = \sqrt{3} \sin x \cos x + 1$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg}x = \sqrt{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là $x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

2. Với mọi tam giác ABC. Chứng minh rằng :

$$\left(1 + \operatorname{tg} \frac{A}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{B}{2}\right) \left(1 + \operatorname{tg} \frac{C}{2}\right) \geq 2 + \sqrt{3} + \frac{S}{p^2} \quad (1)$$

Đặt : $\alpha = \operatorname{tg} \frac{A}{2}, \quad \beta = \operatorname{tg} \frac{B}{2}, \quad \gamma = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$

Ta có : $\operatorname{tg} \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2} \right) = \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \Rightarrow \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 1.$

Ta lại có :

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{\sin A + \sin B - \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} = \alpha\beta$$

$$\Rightarrow \frac{S}{p^2} = \sqrt{\left(\frac{a+b-c}{a+b+c}\right) \left(\frac{a+c-b}{a+b+c}\right) \left(\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)} = \alpha\beta\gamma$$

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (1 + \alpha)(1 + \beta)(1 + \gamma) \geq 2 + \sqrt{3} + \alpha\beta\gamma \\
&\Leftrightarrow 1 + \alpha + \beta + \gamma + \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta\gamma \geq 2 + \sqrt{3} + \alpha\beta\gamma \\
&\Leftrightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq \sqrt{3} \quad (2)
\end{aligned}$$

Đặt : $f(x) = \operatorname{tg} x$ với $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Ta có : $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$

$$f''(x) = 2\operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x) > 0.$$

Theo BĐT Jensen ta có :

$$f\left(\frac{A}{2}\right) + f\left(\frac{B}{2}\right) + f\left(\frac{C}{2}\right) \geq 3f\left(\frac{A+B+C}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq 3\operatorname{tg} 30^\circ \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma \geq \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow (2) \text{ đúng} \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$$

Câu IV :

$$\begin{aligned}
1. \quad f(x) &= \frac{\cos x + \sin x \cdot \cos x}{2 + \sin x} = \frac{(1 + \sin x) \cos x}{2 + \sin x} \\
&= \frac{(2 + \sin x - 1) \cos x}{2 + \sin x} = \cos x - \frac{\cos x}{2 + \sin x}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Họ nguyên hàm của $f(x)$ là :

$$F(x) = \sin x - \ln |2 + \sin x| + C.$$

$$2. (E) : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad ; \quad (d) : x - \sqrt{2}y + 2 = 0.$$

Đặt : $A \begin{cases} x_A = 2\sqrt{2} \cos t \\ y_A = 2 \sin t \end{cases}$ là điểm cần tìm trên Elip.

Ta có :

$$h = AH = d(A, d) = \frac{|2\sqrt{2} \cos t - 2\sqrt{2} \sin t + 2|}{\sqrt{3}}$$

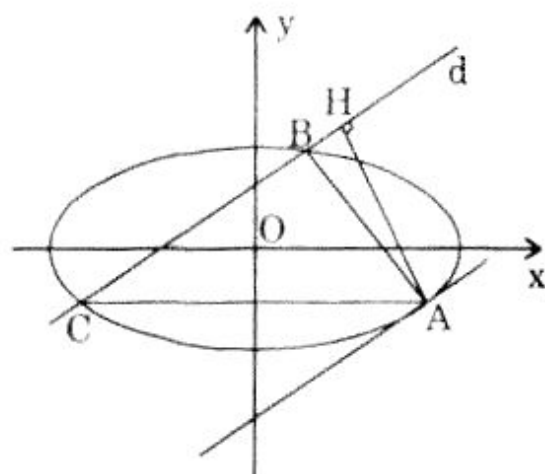
$$h = \frac{\left| 4 \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \right|}{\sqrt{3}}$$

$S_{\triangle ABC}$ lớn nhất $\Leftrightarrow h$ lớn nhất

$$\Leftrightarrow \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow A(2, -\sqrt{2})$$



Câu V :

1. Giải phương trình : $\sqrt{x} + \sqrt{x+9} = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+4}$ (1)

Ta có : điều kiện : $x \geq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x + x + 9 + 2\sqrt{x(x+9)} = x + 1 + x + 4 + 2\sqrt{(x+1)(x+4)}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \sqrt{(x+1)(x+4)} - \sqrt{x(x+9)}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{4(1-x)}{\sqrt{x(x+9)} + \sqrt{(x+1)(x+4)}}$$

Điều kiện : $\begin{cases} 1-x > 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$

Ta có : $f(x) = \frac{4(1-x)}{\sqrt{x(x+9)} + \sqrt{(x+1)(x+4)}}$

- $f(x)$ là hàm số tăng trên $[0, 1)$
- $f(0) = 2$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 0$.

2. Theo Cauchy ta có :

$$1 + x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \sqrt{xy} \Rightarrow \frac{1}{4} \geq xy > 0$$

Đặt : $t = xy$. Ta có : $t \in \left(0, \frac{1}{4}\right]$

$$P = f(t) = t + \frac{1}{t}$$

$$f'(t) = \frac{t^2 - 1}{t^2} < 0.$$

Bảng biến thiên :

x	0	$\frac{1}{4}$
$f'(x)$		
$f(x)$		

Min

Vậy : GTNN (P) = $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$

Khi đó : $\begin{cases} x \cdot y = \frac{1}{4} \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

Đề 30

Câu I :

Cho hàm số : $y = x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2$ (C_m).

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Xác định m để đồ thị (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại 2 điểm phân biệt.

Câu II :

Cho phương trình : $(3 + 2\sqrt{2})^{\lg x} + (3 - 2\sqrt{2})^{\lg x} = m$ (1)

1. Giải phương trình khi $m = 6$.
2. Xác định m để phương trình (1) có đúng 2 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu III :

Cho tam giác ABC, AM là đường trung tuyến, góc $\widehat{AMB} = \alpha$, $AB = c$, $AC = b$. S là diện tích tam giác ABC.

1. Chứng minh : $\cot \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$.
2. Giả sử $\alpha = 45^\circ$. Chứng minh : $\cot C - \cot B = 2$.

Câu IV :

Cho : $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \quad n \geq 0$.

1. Tìm hệ thức liên hệ giữa I_{n+1} và I_n
2. Chứng minh : $I_{n+1} \leq I_n$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$.

Câu V :

Trong không gian Oxyz cho điểm $I(2, 3, -1)$ và đường thẳng (d) có phương trình :

$$(d) : \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

1. Xác định vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của (d). Suy ra phương trình mặt phẳng (P) qua I và vuông góc với đường thẳng (d).
2. Tính khoảng cách từ I đến (d). Suy ra phương trình mặt cầu (S) có tâm I sao cho (S) cắt (d) tại hai điểm thỏa $AB = 40$.

Câu VI :

Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) đường kính AB cố định và điểm M di động trên (C). Gọi S là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A. Hạ $AE \perp SB$ và $AN \perp SM$.

1. Chứng minh : $AN \perp EN$.
2. Chứng minh khi M di động trên (C) thì N luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải

Câu 1 :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

Khi $m = 1$ thì hàm số trở thành :

$$y = x^4 - 2x^2$$

MXĐ : $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm : $y' = 4x^3 - 4x$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 ; x = \pm 1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		0		+1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm uốn : $y'' = 12x^2 - 4$

$$y'' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra : $y = -\frac{5}{9}$

Có hai điểm uốn : $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9}\right); \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5}{9}\right)$

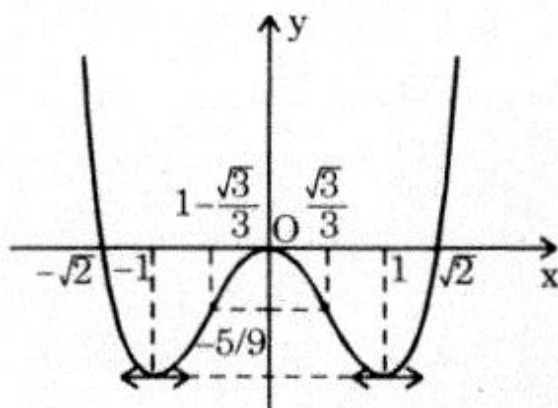
Điểm cực tiểu : $(-1, -1); (1, -1)$

Điểm cực đại : $(0, 0)$

Điểm đặc biệt :

$$y = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm \sqrt{2}$$

Đồ thị :



2. Xác định m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành tại hai điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox :

$$x^4 - 2mx^2 + m^3 - m^2 = 0 \quad (1)$$

Đặt $t = x^2$ thì (1) trở thành :

$$\begin{cases} t^2 - 2mt + m^3 - m^2 = 0 \\ t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Để (C_m) tiếp xúc với Ox tại hai điểm phân biệt, điều kiện cần và đủ là (2) có nghiệm kép dương, nghĩa là :

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - (m^3 - m^2) = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ hay } m = 2 \\ t > 0 \end{cases}$$

Mà $t = m$ (nghiệm kép) nên $m > 0$.

Vậy : khi $m = 2$ thì (2) có một nghiệm kép dương. Suy ra (1) có hai nghiệm kép phân biệt khác nhau, nghĩa là (C_m) tiếp xúc với Ox tại 2 điểm phân biệt A(-2, 0) ; B(2, 0).

Câu II

1. Giải phương trình khi $m = 6$.

Ta có (1) trở thành : $(3 + 2\sqrt{2})^{\text{tg}x} + (3 - 2\sqrt{2})^{\text{tg}x} = 6 \quad (2)$

Điều kiện : $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

Đặt : $t = (3 + 2\sqrt{2})^{\text{tg}x} \Rightarrow t > 0$

$\Rightarrow$ (2) trở thành : $t + \frac{1}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 + 2\sqrt{2} \\ t = 3 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

* Với $t = 3 + 2\sqrt{2} \Rightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\text{tg}x} = 3 + 2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \text{tg}x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

* Với $t = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow (3 + 2\sqrt{2})^{\text{tg}x} = 3 - 2\sqrt{2} = \frac{1}{3 + 2\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \text{tg}x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

2. Xác định m để (1) có đúng 2 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \operatorname{tg} x \in (-\infty, +\infty)$$

$$\text{Đặt : } t = (3 + 2\sqrt{2})^{\operatorname{tg} x} \Rightarrow t > 0$$

$$(1) \text{ trở thành : } t^2 - mt + 1 = 0 \quad (3)$$

Để (1) có đúng 2 nghiệm trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow (3)$ có

đúng hai nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow (3)$ có :

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 > 0 \\ 1 > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2$$

Vậy : khi $m > 2$ thì (1) có 2 nghiệm thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

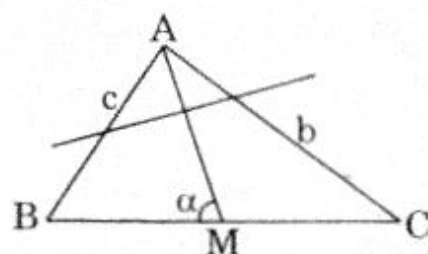
Câu III :

1. Chứng minh : $\cotg \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$

• Trong $\triangle ABM$, ta có :

i) $c^2 = MA^2 + MB^2 - 2MA \cdot MB \cdot \cos \alpha$

ii) $dt(\triangle ABM) = \frac{1}{2} MA \cdot MB \cdot \sin \alpha$



• Trong $\triangle AMC$ ta có :

$$b^2 = MA^2 + MC^2 - 2MA \cdot MC \cos \widehat{AMC}$$

$$= MA^2 + MB^2 + 2MA \cdot MB \cos \alpha$$

$$[\text{vì } \cos \widehat{AMC} = \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha \text{ và } MC = MB].$$

• Trong $\triangle ABC$, ta có :

$$dt(\triangle AMB) = dt(\triangle AMC) \quad [\text{vì } MB = MC].$$

Nên : $dt(\triangle AMB) = \frac{1}{2} S$

Suy ra : $S = MA \cdot MB \sin \alpha$

Ta suy ra : $b^2 - c^2 = 4 \cdot MA \cdot MB \cos \alpha$

hay : $b^2 - c^2 = 4S \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Leftrightarrow \cotg \alpha = \frac{b^2 - c^2}{4S}$

2. Chứng minh : $\cotg C - \cotg B = 2$.

Khi $\widehat{AMB} = \alpha = 45^\circ$ thì $AB < AC$ nên chân đường cao H vẽ từ A trong $\triangle ABC$ thuộc đoạn MB và $AH = HM$.

- Trong $\triangle ABH$ vuông tại H ta có :

$$\cotg B = \frac{BH}{AH} = \frac{BH}{HM}$$

- Trong $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có :

$$\cotg C = \frac{CH}{AH} = \frac{CH}{HM}$$

- Suy ra : $\cotg C - \cotg B = \frac{CH}{HM} - \frac{BH}{HM} = \frac{2HM}{HM} = 2$

Cách khác : ta đã biết, trong $\triangle ABC$ có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ và $dt(\triangle ABC) = S$ thì :

$$\cotg B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \quad \text{và} \quad \cotg C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó : } \cotg C - \cotg B &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{4S} - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{4S} \\ &= \frac{b^2 - c^2}{2S} = 2\cotg \alpha = 2 \quad [\text{vì } \alpha = 45^\circ] \end{aligned}$$

Câu IV :

1. Tìm hệ thức giữa I_{n+1} và I_n .

Từ : $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \quad (n \geq 0).$

Ta suy ra : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx$

Đặt : $u = x^{n+1} \Rightarrow du = (n+1)x^n dx$
 $dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$

Ta được : $I_{n+1} = x^{n+1} e^x \Big|_0^1 - (n+1) \int_0^1 x^n e^x dx$

$$\Leftrightarrow I_{n+1} = e - (n+1)I_n \Leftrightarrow I_{n+1} + (n+1)I_n = e \quad (1)$$

2. Chứng minh $I_{n+1} \leq I_n$.

Vì $x \in [0 ; 1]$, nên $x^{n+1} \leq x^n$.

Suy ra : $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^x dx \leq \int_0^1 x^n e^x dx = I_n$ [vì $e^x > 0$].

Vậy : $I_{n+1} \leq I_n$.

• Chứng minh : $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$

Vì $x \in [0 ; 1]$ nên $x^n x^x \geq 0$.

Suy ra : $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx \geq 0$

Dãy I_n không tăng [vì $I_{n+1} \leq I_n$] lại bị chặn dưới nên có giới hạn.

Vậy : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{I_n}{n} \right) = 0$.

Suy ra : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{I_{n+1}}{n+1} \right) = 0$

Mặt khác, từ câu 1, ta có : $I_{n+1} + (n+1)I_n = e$

Nên : $\frac{I_{n+1}}{n+1} + I_n = \frac{e}{n+1}$

Mà : $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{I_{n+1}}{n+1} \right) = 0$ và $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n+1} = 0$

Nên : $\lim_{n \rightarrow \infty} (I_n) = 0$.

Câu V :

1. Xác định vectơ chỉ phương $\vec{v}$ của (d).

Ta có : $\vec{v} = \left(\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (8, 4, -8)$.

- Phương trình mp (P).

Gọi $M(x, y, z) \in mp(P)$ thì $\overrightarrow{IM} \perp \vec{v}$.

$$\Leftrightarrow 8(x - 2) + 4(y - 3) - 8(z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 2z - 9 = 0.$$

Cách khác :

Phương trình tổng quát của mp (P) :

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (*)$$

$$\bullet I(2, 3, -1) \in mp(P) \quad \Leftrightarrow \quad 2A + 3B - C + D = 0 \quad (1)$$

$$\bullet \vec{v} \perp mp(P) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{A}{8} = \frac{B}{4} = \frac{C}{-8} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $B = \frac{A}{2}$; $C = -A$; $D = -\frac{9}{2}A$.

Thay vào (*) ta được : $2x + y - 2z - 9 = 0$.

2. Tính khoảng cách từ I đến (d).

Gọi J là hình chiếu của I lên (d) thì J có tọa độ là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \\ 2x + y - 2z - 9 = 0 \end{cases}$$

Giải ra, ta được $J(-3, -7, -11)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } IJ^2 &= (-3 - 2)^2 + (-7 - 3)^2 + (-11 + 1)^2 \\ &= 25 + 100 + 100 = 225 \end{aligned}$$

Vậy : $IJ = 15$, đó là khoảng cách từ I đến (d).

- Phương trình mặt cầu (S) :

(S) cắt (d) tại A và B nên J là trung điểm của AB và $IJ \perp AB$ tại J.

ΔIJA vuông tại J có : $IJ = 15$; $JA = 20$

Nên : $IA^2 = IJ^2 + JA^2 = 15^2 + 20^2 = 25^2 \Leftrightarrow IA = 25.$

Đáy chính là bán kính của mặt cầu (S). Vậy phương trình của (S) :

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25^2.$$

Câu VI :

1. Chứng minh : $AN \perp EN.$

• $M \in (C)$

$$\Rightarrow MB \perp AM \quad (1)$$

$$AS \perp mp(AMB)$$

$$\Rightarrow MB \perp SA \quad (2)$$

(1) và (2) cho :

$$MB \perp mp(SAM) \Rightarrow AN \perp MB \quad (3)$$

$$\text{Mà } AN \perp SM \quad (4)$$

(3) và (4) cho :

$$AN \perp mp(SMB) \Rightarrow AN \perp NE.$$

2. N thuộc đường tròn cố định.

$$\text{Ta có : } \left. \begin{array}{l} AE \perp SB \text{ (gt)} \\ AN \perp SB \text{ (cmt)} \end{array} \right\} \Rightarrow SB \perp mp(AEN) \text{ tại E.}$$

Ngoài ra A, E cố định nên $mp(AEN)$ cố định $\Rightarrow N \in mp(AEN)$ cố định. Trong mặt phẳng này, N nhìn AE cố định dưới một góc vuông nên N thuộc đường tròn đường kính AE nằm trong mặt phẳng cố định qua A và vuông góc với SB tại E.

Đề 31

Câu I :

Cho hàm số : $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$

1. Tìm a để các điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị đối xứng qua đường thẳng $y = x.$

2. Tìm a để đường thẳng $y = x$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt A, B, C với $AB = BC$.

Câu II :

1. Tìm m để bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + m) > -3$ có nghiệm.
2. Tìm a để bất phương trình : $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ có nghiệm với a là tham số dương.

Câu III :

1. Tìm y để bất phương trình : $x^2 + 2x(\cos y - \sin y) + 2\sin^2 y \geq 0$ nghiệm đúng với mọi x .
2. Cho a, b, c là 3 cạnh của một tam giác bất kỳ. S là diện tích của tam giác đó. Chứng minh :

$$S^2 \leq \frac{1}{6}(a^4 + b^4 + c^4).$$

Câu IV :

1. Tính : $I = \int x|x-a|dx$ với a là tham số dương.
2. Cho tứ diện ABCD với $AB = CD = AC = BD = AD = BC$. Trong mặt phẳng (BCD) dựng tam giác PQR sao cho B, C, D lần lượt là trung điểm các cạnh QR, PR, PQ. Chứng minh rằng AP, AQ, AR vuông góc với nhau từng đôi một.

Câu V :

Cho elip (E) có phương trình : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

Cho $A(-3, 0)$; $M(-3, a)$; $B(3, 0)$ và $N(3, b)$, trong đó a và b là 2 số thay đổi.

1. Xác định tọa độ giao điểm I của đường thẳng AN và BM.
2. Chứng tỏ rằng điều kiện cần và đủ để đường thẳng MN tiếp xúc (E) là $ab = 4$.

Câu VI :

Cho hình chóp SABCD, đáy ABCD là hình chữ nhật với $AB = a$; $AD = b$. Cạnh $AS = 2a$ của hình chóp vuông góc với đáy. M là điểm trên cạnh AS, với $AM = x$ ($0 \leq x \leq 2a$).

1. Mặt phẳng (MBC) cắt hình chóp theo thiết diện gì ? Tính diện tích thiết diện ấy.
2. Xác định x để mặt phẳng (MBC) chia hình chóp ra hai phần với thể tích bằng nhau.

Giải**Câu I :**

1. Tìm a để đồ thị cực đại và cực tiểu của đồ thị đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x$.

Ta có MXĐ : $D = R$.

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6ax$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{hay} \quad x = 2a.$$

Điều kiện để hàm số có cực đại và cực tiểu là $a \neq 0$. Tọa độ điểm cực đại và cực tiểu :

$$(x = 0 ; y = 4a^3) \text{ và } (x = 2a ; y = 0) \text{ hoặc ngược lại.}$$

Điều kiện để hai điểm này đối xứng qua đường thẳng $y = x$ là :

$$4a^3 = 2a \Leftrightarrow a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{loại } a = 0).$$

2. Tìm a để đồ thị cắt đường thẳng $y = x$ tại A, B, C với $AB = BC$.

- Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và đường thẳng $y = x$ là : $x^3 - 3ax^2 - x + 4a^3 = 0$ (1)

Gọi x_A, x_B, x_C là hoành độ của A, B, C thì x_A, x_B, x_C là nghiệm của (1) và : $x_A + x_C = 2x_B$ ($AB = BC$) (2)

Mà theo định lý Viet, ta có : $x_A + x_B + x_C = 3a$

$$(2) \text{ và } (3) \text{ cho : } 3x_B = 3a \Leftrightarrow x_B = a.$$

Thay vào (1), ta có :

$$2a^3 - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \text{hay} \quad a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Khi $a = 0$ thì (1) cho :

$$x^3 - x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0, x = -1, x = +1.$$

Vậy : A, B, C lần lượt có hoành độ là -1, 0, 1.

- Khi $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) cho :

$$x^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 - x + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_A = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}} ; x_B = \frac{\sqrt{2}}{2} ; x_C = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

- Khi $a = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì (1) cho :

$$x^3 + \frac{3\sqrt{2}}{2}x^2 - x - \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x_A = -\frac{\sqrt{2} + \sqrt{5}}{2} ; x_B = -\frac{\sqrt{2}}{2} ; x_C = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

Vậy : giá trị của a phải tìm là $a = 0$ hay $a = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu II :

1. Tìm m để bất phương trình : $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + m) > -3$ có nghiệm.

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + m) > -3$$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + m) > \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m > 0 \\ x^2 - 2x + m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -x^2 + 2x \\ m < -x^2 + 2x + 8 \end{cases}$$

Đặt : $y_1 = -x^2 + 2x$ có đồ thị là (P_1) .

và : $y_2 = x^2 + 2x + 8$ có đồ thị là (P_2) .

Thì : $y_1 < m < y_2$.

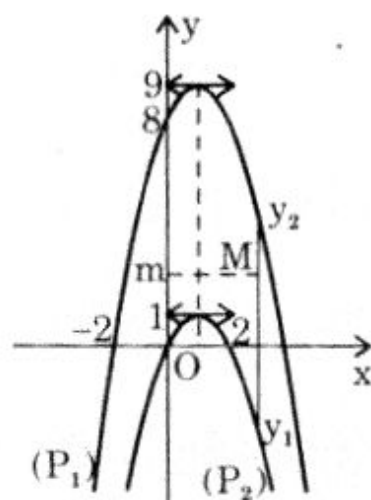
Gọi $M(x, m)$ thì M thuộc miền trong của (P_2) và miền ngoài của (P_1) .

Mà (P_1) hoàn toàn lọt vào miền trong của (P_2) nên để cho hệ bất phương trình trên có nghiệm, ta phải có :

$$m < \max(y_2) \Leftrightarrow m < 9.$$

Tóm lại : khi $m < 9$ thì :

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 2x + m) > -3 \text{ có nghiệm.}$$



2. Tìm a.

Cách 1 :

Đặt : $y = \sqrt{x} - \sqrt{x-1}$.

MXĐ : $x \geq 1$.

• Đạo hàm : $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x-1}} < 0, \quad \forall x > 1.$

Ta có : $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x-1}} = 0.$

• Bảng biến thiên :

x	1	$+\infty$
y'		-
y	1	0

Như thế, $\sqrt{x} - \sqrt{x-1}$ thuộc khoảng $(0, 1)$ nên bất phương trình $\sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a$ có nghiệm khi $0 < a < 1$.

Cách khác :

$$\text{Bất phương trình: } \sqrt{x} - \sqrt{x-1} > a \quad (1)$$

$$\text{có thể viết : } \sqrt{x} > a + \sqrt{x-1} \quad \text{với } x \geq 1 \text{ và } a > 0 \quad (2)$$

Bình phương hai vế ta được :

$$(2) \Rightarrow 1 - a^2 > 2a\sqrt{x-1} \quad (3)$$

Có các trường hợp sau (nhớ : $a > 0$).

- i) $1 - a^2 < 0 \Leftrightarrow a < 1$: (2) vô nghiệm.
- ii) $1 - a^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$: Bình phương (3)

$$(3) \Leftrightarrow (1 - a^2)^2 > 4a^2(x - 1) \Leftrightarrow x < \frac{(a^2 + 1)^2}{4a^2}$$

$$\text{Vì } x \geq 1 \text{ nên } \frac{(a^2 + 1)^2}{4a^2} \geq 1$$

$$\Leftrightarrow (a^2 - 1)^2 \geq 0 \quad \text{đúng với } 0 < a < 1.$$

Tóm lại : khi $0 < a < 1$ thì (1) có nghiệm.

Câu III :

1. Tìm y.

Bất phương trình bậc hai theo x :

$$x^2 + 2x(\cos y + \sin y) + 2\sin^2 y \geq 0 \quad (1) \text{ nghiệm đúng với mọi } x.$$

(1) đúng với $\forall x$ khi và chỉ khi $\Delta x \leq 0$.

$$\Leftrightarrow (\cos y + \sin y)^2 - 2\sin^2 y \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 y - \sin^2 y + 2\sin y \cos y \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2y + \sin 2y \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2y\right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2} + k2\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2y \leq \frac{3\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{8} + k\pi \leq y \leq \frac{5\pi}{8} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

2. Chứng minh : $S^2 \leq \frac{1}{16}(a^4 + b^4 + c^4)$.

Từ công thức Hêrông :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Ta có : $S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$

$$= \frac{1}{16} [a+b+c][b+c-a][a+c-b][a+b-c]$$

$$= \frac{1}{16} [(a+b)^2 - c^2][c^2 - (a-b)^2]$$

$$\leq \frac{1}{16} [a^2 + b^2 - c^2 + 2ab]c^2$$

$$\leq \frac{1}{16} [2a^2c^2 + 2c^2b^2 - c^4] \quad [\text{vì } 2ab \leq a^2 + b^2]$$

$$\leq \frac{1}{16} [a^4 + c^4 + c^4 + b^4 - c^4] \quad [\text{vì } 2a^2c^2 \leq a^4 + c^4]$$

$$\leq \frac{1}{16} [a^4 + b^4 + c^4].$$

Câu IV :

1. Tính : $\int_0^1 x|x-a|dx$ với a là tham số dương.

Vì $a > 0$ nên ta có các trường hợp sau :

i) $a > 1$: lúc đó $x - a < 0$

a	0	1	a	$+\infty$
$x - a$			- 0 +	
$ x - a $		$a - x$		

Suy ra : $|x - a| = -(x - a) = a - x$

$$\begin{aligned}\text{Ta có : } I &= \int_0^1 x(a-x)dx = \int_0^1 (ax - x^2)dx \\ &= \left. \frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Vậy : khi $a > 1$ thì $I = \frac{a}{2} - \frac{1}{3}$.

ii) $0 < a < 1$, lúc đó : $x - a < 0$ khi $0 < x < a$.

a	0	a	1	$+\infty$
$x - a$	-	0	+	+
$ x - a $	$a - x$	$x - a$		

và $x - a > 0$ khi $a < x < 1$.

$$\begin{aligned}\text{Do đó : } I &= \int_0^a x(a-x)dx + \int_a^1 x(x-a)dx \\ &= \left(\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a + \left(\frac{x^3}{3} - \frac{ax^2}{2} \right) \Big|_a^1 \\ &= \frac{a^3}{6} + \frac{1}{3} - \frac{a}{2} - \left(\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right) = \frac{a^2}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3}\end{aligned}$$

$$\text{Tóm lại : } I = \begin{cases} \frac{a}{2} - \frac{1}{3} & \text{khi } a > 1 \\ \frac{a^3}{3} - \frac{a}{2} + \frac{1}{3} & \text{khi } 0 < a < 1 \end{cases}$$

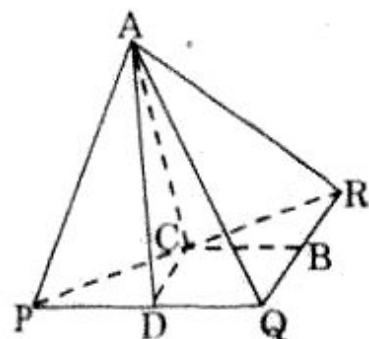
2. Chứng minh AP, AQ, AR vuông góc với nhau từng đôi một.

Xét ΔAQR , ta thấy :

$$BQ = BR = DC$$

(đường trung bình trong ΔPQR) (1)

Mà : $DC = AB$ (gt)



Vậy ΔAQR có trung tuyến AB bằng $\frac{1}{2}QR$ nên ΔAQR vuông tại A .

Suy ra : $AQ \perp AR$

Tương tự : ta có : $AP \perp AQ$ và $AP \perp AR$.

Câu V :

1. Xác định tọa độ giao điểm I của AN và BM .

Gọi $I(x, y)$.

- A, I, N thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow b(x + 3) - 6y = 0$$

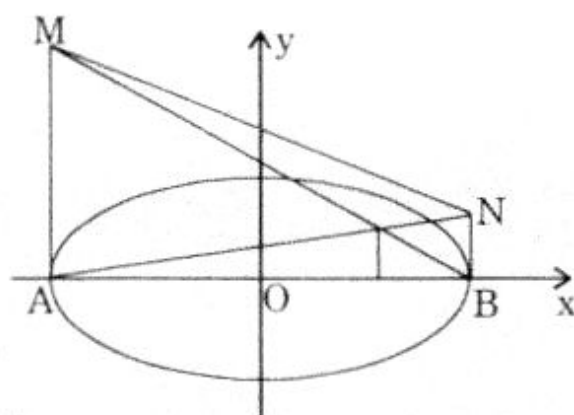
$$\Leftrightarrow bx - 6y + 3b = 0 \quad (1)$$

- B, I, M thẳng hàng.

$$\Leftrightarrow ax + 6y - 3a = 0 \quad (2)$$

Giải hệ tạo bởi (1) và (2) ta được :

$$I \begin{cases} x = \frac{3(a-b)}{a+b} \\ y = \frac{ab}{a+b} \end{cases} \quad (a+b \neq 0).$$



2. Chứng minh MN tiếp xúc $(E) \Leftrightarrow ab = 4$.

- Phương trình của đường thẳng MN :

$$(x + 3)(y - b) - (x - 3)(y - a) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - b)x + 6y - 3(a + b) = 0$$

- Điều kiện để MN tiếp xúc với (E) :

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow 9(a - b)^2 + 4 \times 36 = 9(a + b)^2$$

$$\Leftrightarrow ab = 4.$$

Câu VI :

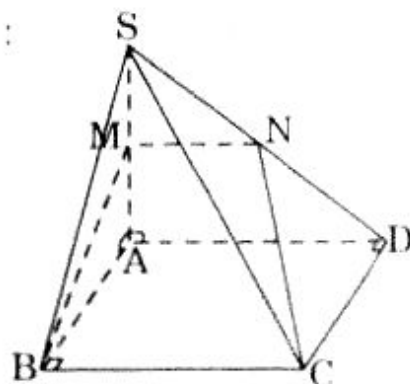
1. M_p (MBC) cắt hình chóp theo hình gì ?

- Gọi N là giao điểm của mp (MBC) và SD :

Vì $BC \subset \text{mp (MBC)}$.

$BC \parallel AD \subset \text{mp (SAD)}$

$\Rightarrow \text{mp (MBC)} \cap \text{mp (SAD)}$
theo giao tuyến MN.



Suy ra : $MN \parallel BC$.

Ngoài ra : $MB \perp BC$ (định lý 3 đường thẳng vuông góc) (2)

(1) và (2) chứng tỏ : thiết diện của mp (MBC) và hình chóp S.ABCD là hình thang BCNM vuông tại B và M.

2. Xác định x :

Gọi V là thể tích của hình chóp S.ABCD.

$$\text{Ta có : } V_{SABC} = V_{SACD} = \frac{1}{2} V \quad (1)$$

$$V_{SMBC} + V_{SMCD} = V_{SMBCN} \quad (2)$$

$$\text{Mà : } \frac{V_{SMBC}}{V_{SABC}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SB}{SB} \cdot \frac{SC}{SC} = \frac{SM}{SA}$$

$$\Rightarrow V_{SMBC} = \frac{V}{2} \cdot \frac{SM}{SA}$$

$$\text{và : } \frac{V_{SMCN}}{V_{SACD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SC}{SC} \cdot \frac{SN}{SD} = \left(\frac{SM}{SA} \right)^2$$

$$\Rightarrow V_{SMCD} = \left(\frac{SM}{SA} \right)^2 \frac{V}{2}$$

Thay vào (2), ta được :

$$V_{SMBCN} = \left[\frac{SM}{SA} + \left(\frac{SM}{SA} \right)^2 \right] \frac{V}{2}$$

$$\text{Theo đề bài : } V_{SMBCN} = \frac{1}{2} V$$

$$\text{Do đó : } \left(\frac{SM}{SA}\right)^2 + \left(\frac{SM}{SA}\right) - 1 = 0 \quad (3)$$

$$\text{Đặt : } t = \frac{SM}{SA} \quad \text{thì } t = \frac{2a - x}{2a} > 0 \quad [\text{vì } 0 \leq x \leq a]$$

$$\text{Nên (3)} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + t - 1 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Suy ra : } \frac{2a - x}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = (3 - \sqrt{5})a$$

$$\text{Vì : } 0 < 3 - \sqrt{5} < 2 \quad \text{nên } 0 \leq x \leq 2a.$$

Vậy : khi $x = (3 - \sqrt{5})a$ thì mp (MBC) chia hình chóp SABCD thành hai phần có thể tích bằng nhau.

Cách khác :

- Thể tích của hình chóp SABCD là :

$$V = \frac{1}{3} ab \cdot 2a = \frac{2a^2 b}{3} \quad (1)$$

- Thể tích hình lăng trụ cắt tam giác ABM.DCN :

$$V' = \frac{MN + DA + BC}{3} \cdot dt(\triangle ABM) \quad (2)$$

$$\text{Mà : } dt(\triangle ABM) = \frac{1}{2} AB \cdot AM = \frac{ax}{2}$$

$$\text{và } MN \parallel AD \text{ nên } \frac{MN}{AD} = \frac{SM^2}{SA} \Rightarrow MN = \frac{(2a - x)b}{2a}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } \frac{MN + AD + BC}{3} &= \frac{1}{3} \left(\frac{2ab - bx}{2a} + 2b \right) \\ &= \frac{2ab - bx + 4ab}{6a} \end{aligned}$$

$$\text{Do (2), ta có : } V' = \frac{(2ab - bx + 4ab)}{6a} \cdot \frac{ax}{2} = \frac{-bx^2 + 6abx}{12}$$

Theo đề bài : $V' = \frac{1}{2} V$

nên :
$$\frac{-bx^2 + 6abx}{12} = \frac{a^2b}{3} \Rightarrow x^2 - 6ax + 4a^2 = 0$$

Giải phương trình này :

$$\Delta' = 9^2 a^2 - 4a^2 = 5a^2$$

Ta có : $x = (3 \pm \sqrt{5})a$

Vì $0 \leq x \leq 2a$ nên ta chỉ nhận : $x = (3 - \sqrt{5})a$.

Đề 32

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$$

2. Tìm điểm A thuộc trục hoành sao cho qua A chỉ vẽ được duy nhất một tiếp tuyến với đồ thị ở phần 1.

Câu II :

1. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x = y^3 + y^2 + y - 2 \\ y = z^3 + z^2 + z - 2 \\ z = x^3 + x^2 + x - 2 \end{cases}$$

2. Tìm nghiệm dương của phương trình : $x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5}$

Câu III :

1. Giải phương trình: $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$.
2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có :

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}.$$

Câu IV :

1. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có ba đỉnh là $A(1, 1)$; $B(-1, 2)$; $C(0, -1)$.

2. Tính : $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

Câu V :

1. Xác định tham số a sao cho hàm số $y = \frac{a \sin x - \cos x - 1}{a \cos x}$ đạt cực trị tại ba điểm phân biệt thuộc khoảng $\left(0, \frac{9\pi}{4}\right)$.

2. Giải phương trình : $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$.

Giải

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số :

$$y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1} = x + 2 + \frac{4}{x - 1}$$

- MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

- Đạo hàm : $y' = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

- Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	$+7$	$+\infty$	

- Điểm cực đại : $(-1, -1)$

- Điểm cực tiểu : $(3, 7)$

- Tiệm cận đứng :

$\lim_{x \rightarrow 1} y = \infty$ nên $x = 1$ là đường

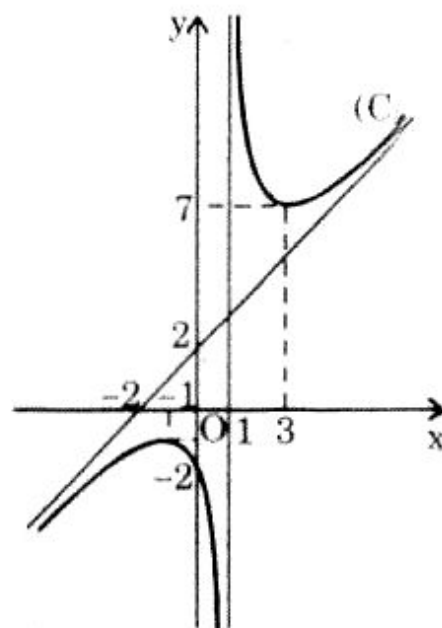
tiệm cận đứng.

- Tiệm cận xiên :

$$y = x + 2 + \frac{4}{x-1} \text{ có :}$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x-1} = 0$ nên $y = x + 2$ là đường tiệm cận xiên.

Đồ thị : (hình)



2. Tìm điểm A trên $x'Ox$:

Gọi a là hoành độ của A trên $x'Ox$. Tọa độ của A : $A(a, 0)$.

Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (d) qua A. Phương trình của (d) : $y = kx - ka$. Phương trình hoành độ của (d) và (C) , đồ thị ở câu 1 :

$$\frac{x^2x + 2}{x-1} = kx - ka$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (1-k)x^2 + (1+ka+k)x + 2-ka = 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (1)$$

(d) tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow (1)$ có nghiệm số kép :

$$\Leftrightarrow (1+ka+k)^2 - 4(1-k)(2-ka) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)^2 k^2 + 2(3a+5)k - 7 = 0 \quad (2)$$

Điều kiện : (2) có 1 nghiệm duy nhất theo k . Có 2 trường hợp :

i) (2) có 1 nghiệm đơn $\Leftrightarrow (a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

ii) (2) có 1 nghiệm kép theo k .

$$\Leftrightarrow (3a+5)^2 + 7(a-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Vậy, khi $a = 1$ thì qua A, ta chỉ vẽ được một tiếp tuyến cho (C).

Hệ số góc của tiếp tuyến này là : $k = \frac{7}{16}$.

Câu II :

1. Giải hệ phương trình :

$$\text{Hệ cho có thể viết : } \begin{cases} x - 1 = y^3 - 1 + y^2 - 1 + y - 1 \\ y - 1 = z^3 - 1 + z^2 - 1 + z - 1 \\ z - 1 = x^3 - 1 + x^2 - 1 + x - 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = (y - 1)(y^2 + 2y + 3) \\ y - 1 = (z - 1)(z^2 + 2z + 3) \\ z - 1 = (x - 1)(x^2 + 2x + 3) \end{cases}$$

Hệ này có một nghiệm : $x = 1$; $y = 1$; $z = 1$.

Giả sử $x \neq 1$ và $y \neq 1$ thì hệ trên trở thành, (bằng cách nhân vế) :

$$(x^2 + 2x + 3)(y^2 + 2y + 3)(z^2 + 2z + 3) = 1$$

Điều này vô lý, vì mỗi thừa số đều lớn hơn 1.

Vậy hệ chỉ có một nghiệm duy nhất : (1, 1, 1).

2. Tìm nghiệm dương của phương trình :

$$x + x^{\log_2 3} = x^{\log_2 5} \quad (1)$$

vì $x > 0$ nên $x^{\log_2 5} \neq 0$

Chia 2 vế của (1) cho $x^{\log_2 5}$ ta được :

$$\begin{aligned} x^{1-\log_2 5} + x^{\log_2 3-\log_2 5} &= 1 \Leftrightarrow x^{\log_2 \frac{2}{5}} + x^{\log_2 \frac{3}{5}} = 1 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2 x} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x} &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

Ta thấy $x = 2$ là 1 nghiệm của (2)

Giả sử $x \neq 2$. Ta có 2 trường hợp :

i) $0 < x < 2$: Lúc này :

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2 x} < \frac{2}{5} \quad \text{và} \quad \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x} < \frac{3}{5}$$

nên :
$$\left(\frac{2}{5}\right)^{\log_2 x} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_2 x} < \frac{2}{5} + \frac{3}{5} < 1$$

(trái với (2)). Vậy (2) không có nghiệm trong khoảng $(0, 2)$.

ii) $x > 2$: Chứng minh tương tự, (2) không có nghiệm $x > 2$.

Tóm lại, (1) chỉ có 1 nghiệm : $x = 2$.

Câu III :

1. Giải phương trình : $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0$ (1)

Ta có : (1) $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x(\cos x + 1) = 1 - \sin x \quad (3)$$

Vì $\cos x = -1$ không thỏa (3) nên :

$$(3) \Leftrightarrow 2\cos^2 x = \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} \quad (4)$$

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ và $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$\Rightarrow 1 - \sin x = \frac{(1-t)^2}{1+t^2} \quad \text{và} \quad 1 + \cos x = \frac{2}{1+t^2}$$

Do đó (4) $\Leftrightarrow 4(1-t^2)^2 = (1-t)^2(1+t^2)^2$

$$\Leftrightarrow 4(1-t)^2(1+t)^2 = (1-t)^2(1+t^2)^2 \quad (5)$$

Có hai trường hợp :

i) $t = 1$: là nghiệm của (5).

Lúc đó : $\tan \frac{x}{2} = \tan \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

ii) $t \neq 1$: lúc đó, (5) cho :

$$4(1+t)^2 = (1+t^2)^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+t^2 = 2(1+t) \\ 1+t^2 = -2(1+t) \end{cases} \quad \begin{matrix} (6) \\ (7) \end{matrix}$$

$$(6) \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 2 \Leftrightarrow t = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow x = 2\operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{2}) + k'2\pi \quad (k' \in \mathbb{Z})$$

$$(7) \Leftrightarrow t^2 + 2t + 1 = -2 \Leftrightarrow (t+1)^2 = -2 \text{ (VN)}$$

Tóm lại : nghiệm của (1) là :

$$x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{hay} \quad x = 2\operatorname{arctg}(1 \pm \sqrt{2}) + k'2\pi \quad (k, k' \in \mathbb{Z})$$

2. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta đều có :

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$$

• Trong mọi $\triangle ABC$, ta có : $A + B + C = \pi$

$$\Leftrightarrow \frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2} \Rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \operatorname{tg} \frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \frac{B}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{C}{2} + \operatorname{tg} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 1$$

Đặt : $a = \operatorname{tg} \frac{A}{2}$; $b = \operatorname{tg} \frac{B}{2}$; $c = \operatorname{tg} \frac{C}{2}$

thì : $a > 0$; $b > 0$; $c > 0$ và $ab + bc + ca = 1$ (1)

• Mặt khác : $\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = \left(a^{\sqrt{2}}\right)^2$; $\left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = \left(b^{\sqrt{2}}\right)^2$;

$$\left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = \left(c^{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$\begin{aligned}\text{Nên : } \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} &= \left(a^{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(b^{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 2a^{\sqrt{2}}b^{\sqrt{2}} \\ &= 2(ab)^{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Tương tự :

$$\begin{aligned}\bullet \quad &\left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} = \left(b^{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(c^{\sqrt{2}}\right)^2 \geq 2(bc)^{\sqrt{2}} \\ \bullet \quad &\left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 2(ca)^{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Do đó :

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq (ab)^{\sqrt{2}} + (bc)^{\sqrt{2}} + (ca)^{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Đặt : $y = x^{\sqrt{2}}$ (với $x = ab$) thì $y' = \sqrt{2}.x^{\sqrt{2}-1} > 0$

với $x > 0$ (vì $a > 0$ và $b > 0$) nên y tăng trên $(0, +\infty)$.

$$\begin{aligned}\text{Suy ra : } (ab)^{\sqrt{2}} + (bc)^{\sqrt{2}} + (ca)^{\sqrt{2}} &\geq 3\left(\frac{ab + bc + ca}{3}\right)^{\sqrt{2}} \\ &= 3\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}} \quad [\text{do (1)}] \\ &= 3^{1-\sqrt{2}}\end{aligned}$$

So sánh với (2) ta được :

$$\left(\operatorname{tg} \frac{A}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{B}{2}\right)^{2\sqrt{2}} + \left(\operatorname{tg} \frac{C}{2}\right)^{2\sqrt{2}} \geq 3^{1-\sqrt{2}}$$

Câu IV :

1. Lập phương trình ngoại tiếp tam giác ABC.

Phương trình đường tròn (C) có dạng :

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (*)$$

- (C) qua A(1, 1) :

$$\Leftrightarrow -2a - 2b + c + 2 = 0 \quad (1)$$

- (C) qua B(-1, 2) :

$$\Leftrightarrow 2a - 4b + c + 5 = 0 \quad (2)$$

- (C) qua C(0, -1) :

$$\Leftrightarrow 2b + c + 1 = 0 \quad (3)$$

Cộng vế (1) và (2) :

$$-6b + 2c + 7 = 0 \quad (4)$$

(3) và (4) cho : $c = -2$.

Thay $c = -2$ vào (3) ta được $b = \frac{1}{2}$.

Thay $b = \frac{1}{2}$ và $c = -2$ vào (1) ta được $a = -\frac{1}{2}$

Vậy phương trình của (C) :

$$x^2 + y^2 + x - y - 2 = 0.$$

2. Tính : $\int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx$.

$$\text{Đặt : } t = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow x^2 = 1-t^2 \Rightarrow x dx = -t dt$$

Đổi cận :

x	0	1
t	1	0

$$\text{Do đó : } \int_0^1 x^3 \sqrt{1-x^2} dx = - \int_1^0 t^2(1-t^2) dt$$

$$= \int_0^1 [t^2 - t^4] dx = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} \right) \bigg|_0^1 = \frac{2}{15}$$

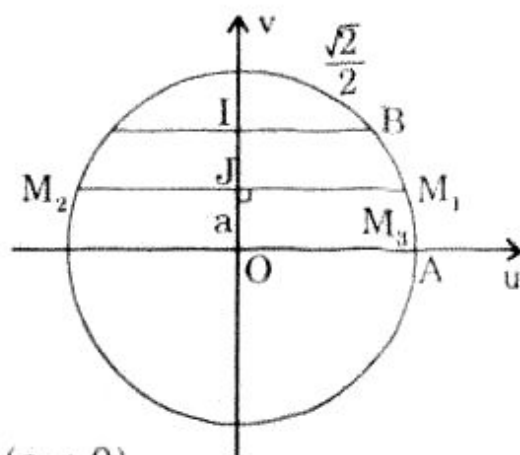
Câu V :

1. Xác định a.

Từ : $y = \operatorname{tg} x - \frac{1}{a} - \frac{1}{a \cos x}$

ta có : $y' = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\sin x}{a \cos^2 x}$
 $= \frac{a + \sin x}{a \cos^2 x} \quad (a \neq 0)$

$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \sin x = -a \quad (a \neq 0)$



Gọi a là gốc của đường tròn lượng giác $(O, 1)$.

Trục cosin : $\overrightarrow{Oa}$ qua A.

Trục sin : $\overrightarrow{Ov}$ với $(\overrightarrow{Ou}, \overrightarrow{Ov}) = \frac{\pi}{2}$

Vì $0 \leq x \leq \frac{9\pi}{4}$ nên gọi B là điểm trên đường tròn $(O, 1)$ sao

cho $\widehat{AB} = \frac{\pi}{4}$ thì $\widehat{AM_2B} = \frac{9\pi}{4}$ với M_1 và M_2 là giao điểm của

đường thẳng qua J ($\overline{OJ} = -a$) vuông góc với $\overrightarrow{Ov}$ và đường tròn $(O, 1)$.

Để cho y có 3 cực trị trong $\left(0, \frac{9\pi}{4}\right)$, điều kiện cần và đủ là $J \in$ đoạn

OI với $\overline{OI} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Mà $\overline{OJ} = -a$ nên $0 < -a \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq a \leq 0$.

Với điều kiện này của a , phương trình : $\sin x = -a$ có 3 nghiệm phân biệt theo x thuộc $\left(0, \frac{9\pi}{4}\right)$. Gọi ba nghiệm đó lần lượt là

x_1, x_2, x_3 thì $x_1 = \widehat{AM}$; $x_2 = \widehat{AM_1M_2}$; $x_3 = \widehat{ABM_1}$. Tại x_1, x_2, x_3 , $y' = \sin x + a$ đổi dấu nên hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2, x_3 thuộc $\left(0, \frac{9\pi}{4}\right)$.

2. Giải phương trình :

$$\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right) \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x^2} + x + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 4$$

• MXD : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq |x| \leq \sqrt{2}.$

• Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpsky vào :

$$\sqrt{2-x^2} + x \quad \text{và} \quad \sqrt{1-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}$$

ta được : $\sqrt{2-x^2} + x \leq \sqrt{2-x^2+x^2} \sqrt{1^2+1^2} = 2 \quad (1)$

$$\sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} \leq \sqrt{2-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}} \sqrt{1^2+1^2} = 2 \quad (2)$$

Dấu "=" của (1) và (2) đều xảy ra khi $x = 1$.

Cộng vế (1) và (2) ta được :

$$\sqrt{2-x^2} + x + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} \leq 4$$

Theo đề bài thì đẳng thức của bất đẳng thức này đã xảy ra, nghĩa là :

$$\sqrt{2-x^2} + x + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x} = 4$$

Vậy : (*) có nghiệm duy nhất : $x = 1$.

Cách khác :

Bình phương 2 vế của : $\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2-\frac{1}{x^2}} = 4 - \left(x + \frac{1}{x}\right)$

Ta được :

$$4 - \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2\sqrt{5-2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)} = 16 - 8\left(x + \frac{1}{x}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2t = t^2 - 4t + 5 \quad \text{với } t = x + \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow 9 - 2t^2 = (t^2 - 4t + 5)^2$$

$$\Leftrightarrow t^4 - 8t^3 + 28t^2 - 40t + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t - 2)^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 2.$$

$$\bullet \text{ Với } t = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{1}{x} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1.$$

- $x = 1$ thỏa phương trình đã cho.

Vậy : phương trình có nghiệm duy nhất : $x = 1$.

Đề 33

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số :

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x$$

2. Tìm tất cả các đường thẳng đi qua điểm A(4, 4) và cắt (C) tại ba điểm phân biệt.

Câu II :

Cho phương trình : $\sqrt{x^2 - 2x + m^2} = |x - 1| - m$

1. Giải phương trình (1) với $m = 2$.
2. Giải và biện luận phương trình (1) theo m .

Câu III :

Cho hàm số : $y_k = \frac{2k \cos x + k + 1}{\cos x + \sin x + 2}$

1. Tìm các giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số y_1 ứng với $k = 1$.
2. Xác định tham số k sao cho giá trị lớn nhất của hàm số y_k là nhỏ nhất.

Câu IV :

1. Tính tích phân : $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$
2. Đặt $J(t) = \int_1^t \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$ với $t > 1$.

Tính $J(t)$ theo t , từ đó suy ra rằng : $J(t) < 2, \forall t > 1$.

Câu V :

Cho parabol (P) : $y = x^2 - 2x + 3$ và (D) là đường thẳng cùng phương với đường thẳng $y = 2x$ sao cho (D) cắt (P) tại điểm A và B.

1. Viết phương trình của (D) khi hai tiếp tuyến với (P) tại A và B vuông góc với nhau.
2. Viết phương trình của (D) khi độ dài của đoạn $AB = 10$.

Câu VI :

Cho tứ diện ABCD có $AB = CD = 2x$ và 4 cạnh còn lại đều có độ dài bằng 1.

1. Tính diện tích toàn phần (tổng diện tích của 4 mặt) của tứ diện theo x .
2. Xác định x để diện tích toàn phần đạt giá trị lớn nhất.

Giải**Câu I :**

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C).

Hàm số : $y = x^3 - 6x^2 + 9x$

MXĐ : $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 12x + 9$

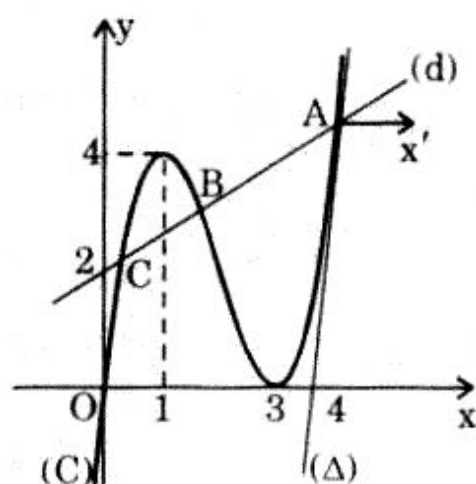
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Điểm uốn : $y'' = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$				
y''		-	0	+	+				
y'		+	0	-	0	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị (C) :



2. Tìm tất cả đường thẳng qua $A(4, 4)$ cắt (C) tại 3 điểm phân biệt.

Cách 1 : Dùng đồ thị (C).

Đường thẳng (d) qua $A(4, 4) \in (C)$ cắt đồ thị tại ba điểm phân biệt khi (d) nằm trong góc $x'Ay'$ tạo bởi $Ax' \parallel Ox$ và $Ay' \parallel Oy$ không trùng với (Δ) là tiếp tuyến của (C) tại A.

Hệ số góc của tiếp tuyến (Δ) là : $y'(x_A) = 9$.

Vậy (d) có hệ số góc thuộc khoảng $(0, +\infty) \setminus \{9\}$.

Cách 2 : Gọi k là hệ số góc của đường thẳng (d) qua $A(4, 4)$.
Phương trình của (d) :

$$y = k(x - 4) + 4$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và (d) :

$$x^3 - 6x^2 + 9x = kx - 4k + 4$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + (9 - k)x + 4k - 4 = 0 \quad (*)$$

Vì $A(4, 4) \in (C)$ nên (*) có một nghiệm bằng 4.

$$\text{Suy ra : (*)} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 & (1) \\ x^2 - 2x + 1 - k = 0 & (2) \end{cases}$$

Để cho (*) có 3 nghiệm phân biệt, ta phải có :

i) $x = 4$ không là nghiệm của (2)

$$\Leftrightarrow 16 - 8 + 1 - k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq 9$$

ii) (2) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow 1 - (1 - k) > 0 \Leftrightarrow k > 0$$

Tóm lại, (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi (d) qua A có hệ số góc thỏa $k > 0$ và $k \neq 9$.

Câu II :

$$\text{Cho phương trình : } \sqrt{x^2 - 2x + m^2} = |x - 1| - m \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi $m = 2$:

Khi $m = 2$, (1) trở thành :

$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} = |x - 1| - 2 \quad (2)$$

$$\text{Đặt : } t = |x - 1| \Rightarrow t^2 = (x - 1)^2 \text{ lúc này :}$$

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{t^2 + 3} = t - 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 3 = (t - 2)^2 \\ t \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{4} \\ t \geq 2 \end{cases}$$

Phương trình vô nghiệm theo t nên (2) vô nghiệm.

Vậy : (1) vô nghiệm khi $m = 2$.

2. Giải và biện luận (1) theo m .

Đặt : $t = |x - 1|$ thì $t \geq 0$ và $t^2 = (x - 1)^2$. Lúc này :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{t^2 + m^2 - 1} = t - m \\ t \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + m^2 - 1 = (t - m)^2 \\ t \geq m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2m} \\ t \geq m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Với điều kiện đó, phương trình (1) có nghiệm :

$$x = 1 \pm \frac{1}{2m} \Leftrightarrow x = \frac{2m \pm 1}{2m}$$

Câu III :

1. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của y_1 :

$$\text{Khi } k = 1, \text{ ta có : } y_1 = \frac{2 \cos x + 2}{\cos x + \sin x + 2}$$

$$\Leftrightarrow y_1 \cos x + y_1 \sin x + 2y_1 = 2 \cos x + 2$$

$$\Leftrightarrow (y_1 - 2) \cos x + y_1 \sin x = 2(-y_1 + 1)$$

Phương trình này có nghiệm theo x .

$$\Leftrightarrow (y_1 - 2)^2 + y_1^2 \geq 4(1 - y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow y_1^2 - 2y_1 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y_1 \leq 2$$

Vậy, $\max(y_1) = 2$ và $\min(y_1) = 0$.

2. Xác định k sao cho $\max(y_k)$ nhỏ nhất.

$$\text{Ta có : } (y_k - 2k)^2 + y_k^2 \geq (k + 1 - 2y_k)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y_k^2 - 4y_k - 3k^2 + 2k + 1 \leq 0$$

$$\text{Suy ra : } \max(y_k) = 2 + \sqrt{6k^2 - 4k + 2}$$

$$\text{Do đó : } \max(y_k) \text{ nhỏ nhất} \Leftrightarrow 6k^2 - 4k + 2 \text{ nhỏ nhất.}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Vậy, khi $k = \frac{1}{3}$ thì $\max(y_k)$ nhỏ nhất.

Câu IV :

1. Tính tích phân : $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$.

Đặt : $u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$\text{Do đó : } I = -\frac{1}{x} \ln x \Big|_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = -\frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy : } I = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

2. Tính $J(t)$ theo t .

Ta có : $J(t) = \int_1^t \left(\frac{\ln x}{x} \right)^2 dx$ với $t > 1$

Đặt : $u = \ln^2 x \quad \Rightarrow \quad du = 2 \frac{1}{x} \ln x dx$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{1}{x}$$

$$\text{Do đó : } J(t) = -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^t + 2 \int_1^t \frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= -\frac{1}{x} \ln^2 x \Big|_1^t + 2 \left(-\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{x} \right) \Big|_1^t$$

$$= -\frac{1}{t} \ln^2 t - \frac{2}{t} \ln t - \frac{2}{t} + 2$$

$$= -\frac{1}{t} [\ln t + 1]^2 - \frac{1}{t} + 2$$

$$\text{Vậy : } J(t) = 2 - \frac{1}{t} [(\ln t + 1)^2 + 1]$$

Suy ra : $J(t) < 2$ khi $t > 1$.

Câu V :

1. Phương trình của (D) khi hai tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau.

Vì (D) cùng phương với đường thẳng $y = 2x$ nên (D) có phương trình : $y = 2x + m$.

Phương trình hoành độ A, B của (P) và (D) :

$$x^2 - 4x + 3 - m = 0 \quad (1)$$

Điều kiện tồn tại A và B là (1) có :

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > -1$$

Đạo hàm y' của $y = x^2 - 2x + 3$ là : $y' = 2x - 2$.

Hệ số góc tiếp tuyến của (P) tại A :

$$y'(x_A) = 2(x_A - 1)$$

Hệ số góc tiếp tuyến của (P) tại B :

$$y'(x_B) = 2(x_B - 1)$$

Hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

$$\Leftrightarrow y'(x_A) \cdot y'(x_B) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4(x_A - 1)(x_B - 1) = -1$$

$$\Leftrightarrow 4x_A x_B - 4(x_A + x_B) + 4 = -1 \quad (2)$$

Mà x_A, x_B là nghiệm của (1) nên :

$$x_A + x_B = 4 ; \quad x_A x_B = 3 - m$$

Thay vào (2) ta được :

$$4(3 - m) - 4(4) + 4 = -1 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}$$

Vậy (D) có phương trình : $y = 2x + \frac{1}{4}$.

2. Phương trình của (D) khi $AB = 10$.

$$\text{Ta có : } AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 \quad (3)$$

Mà : $y_B = 2x_B + m$ và $y_A = 2x_A + m$ [vì $A, B \in (D)$]

Nên : $y_B - y_A = 2(x_B - x_A)$

Do đó :

$$(3) \Leftrightarrow AB^2 = 5(x_B - x_A)^2 \Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 20 \quad (4)$$

Mặt khác x_A, x_B là nghiệm của (1) nên :

$$|x_A - x_B| = \sqrt{\Delta} \Leftrightarrow (x_B - x_A)^2 = 4(m + 1)$$

Do đó (4) cho : $m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 4$

Vậy (D) có phương trình : $y = 2x + 4$.

Câu VI :

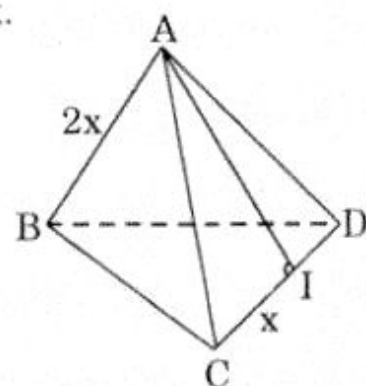
1. Tính diện tích toàn phần của tứ diện theo x .

- Ta thấy 4 mặt của tứ diện ABCD là 4 tam giác bằng nhau (ccc).

Suy ra diện tích toàn phần :

$$S = 4 \cdot dt(\triangle ACD)$$

$$\Leftrightarrow S = 2AI \cdot CD \quad (1)$$



với AI là đường cao của $\triangle ACD$ phát xuất từ A. Vì $\triangle ACD$ cân tại A có $AC = 1$ và $CI = x$, nên :

$$AI = \sqrt{1 - x^2} \quad (0 < x < 1)$$

$$(1) \text{ cho : } S = 2 \cdot 2x \cdot \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow S = 4x\sqrt{1 - x^2} \quad (\text{với } 0 < x < 1)$$

2. Xác định x để S lớn nhất.

$$S \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x\sqrt{1 - x^2} \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - x^2) \text{ lớn nhất}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1 - x^2 \quad [\text{vì } x^2 + (1 - x^2) = 1]$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (\text{nhận}).$$

Đề 34

Câu I :

Cho hàm số : $y = \frac{2x+1}{x+2}$

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đó.
2. Chứng minh rằng đường thẳng $y = -x + m$ luôn cắt đồ thị hàm số tại 2 điểm phân biệt.

Câu II :

Cho x, y là hai số thay đổi thỏa mãn điều kiện :

$$0 \leq x \leq 3 \quad ; \quad 0 \leq y \leq 4$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức :

$$A = (3-x)(4-y)(2x+3y)$$

Câu III :

Tính diện tích hình hữu hạn chắn bởi các đường cong :

$$ax = y^2 \quad ; \quad ay = x^2 \quad (a > 0 \text{ cho trước}).$$

Câu IV :

Xem các đường tròn :

$$(C) : \quad x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$(C_m) : \quad x^2 + y^2 - 2(m+1)x + 4my - 5 = 0$$

1. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_m) khi m thay đổi.
2. Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với đường tròn (C) , ứng với hai giá trị của m .

Câu V :

Cho tứ diện ABCD :

1. Chứng minh rằng các đường thẳng nối mỗi đỉnh với trọng tâm của mặt đối diện là đồng quy tại điểm G.
2. Chứng minh rằng các hình chóp đỉnh G với đáy là các mặt của tứ diện có thể tích bằng nhau.

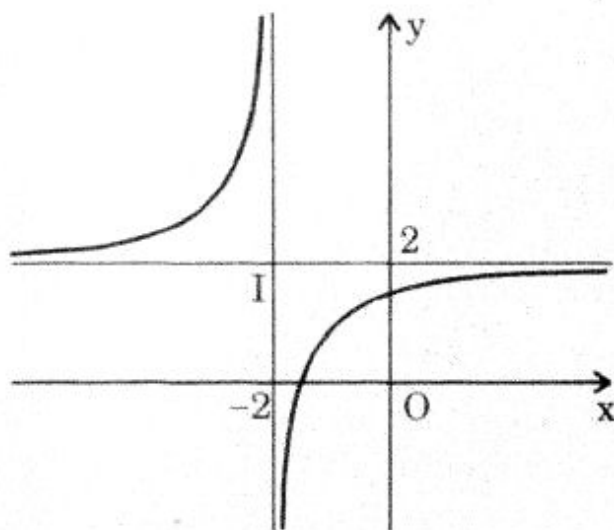
Giải

Câu 1:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị :

$$y = \frac{2x+1}{x+2}$$

- MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$
- Đạo hàm : $y' = \frac{3}{(x+2)^2} > 0 \Rightarrow y$ luôn đồng biến.
- Tiệm cận đứng : $x = -2$; tiệm cận ngang : $y = 2$.
- Đồ thị là một hypebol vuông góc có $I(-2, 2)$ là tâm đối xứng.



2. Chứng minh đường thẳng luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$\frac{2x+1}{x+2} = -x+m \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -2 \\ x^2 + (4-m)x + 1 - 2m = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(2) có : $\Delta = (4-m)^2 - 4(1-2m) = 12 + m^2 > 0; \forall m \in \mathbb{R}$.

Vậy, (2) có 2 nghiệm phân biệt, $\forall m \in \mathbb{R}$ và 2 nghiệm đó đều khác -2 , $\forall m \in \mathbb{R}$ [vì $x^2 + (4-m)x + 1 - 2m \neq 0$ khi $x = -2$].

Tóm lại, đường thẳng $y = -x + m$ luôn luôn cắt đồ thị của $y = \frac{2x+1}{x+2}$ tại hai điểm phân biệt, $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu II :

Vì $0 \leq x \leq 3$ nên $3 - x \geq 0$ và $2x > 0$

$0 \leq y \leq 4$ nên $4 - y \geq 0$ và $3y > 0$

Do đó $2x + 3y > 0$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 3 số không âm :

$$6 - 2x, \quad 12 - 3y, \quad 2x + 3y$$

Ta được : $(6 - 2x) + (12 - 3y) + (2x + 3y) \geq 3\sqrt[3]{6A}$

$$\Leftrightarrow 18 \geq 3\sqrt[3]{6A} \Leftrightarrow A \leq 36$$

Vậy, A lớn nhất là 36. Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 6 - 2x = 12 - 3y \\ 6 - 2x = 2x + 3y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Câu III :

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường cong :

$$ax = \frac{x^4}{a^2} \Leftrightarrow x(x^3 - a^3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = a \end{cases}$$

Gọi S là diện tích phải tính, ta có :

$$S = \int_0^a \left[\sqrt{ax} - \frac{x^2}{a} \right] dx$$

$$S = \left(\frac{2}{3} \sqrt{a} x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^3}{3a} \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{3} \text{ (đvdt).}$$

Câu IV :

1. Tìm quỹ tích tâm các đường tròn (C_m) .

Ta có : (C_m) có tâm $I(x = m + 1 ; y = -2m)$

Khử m giữa (x, y) của I , ta được :

$$2x + y - 2 = 0$$

Mặt khác, (C_m) là đường tròn khi và chỉ khi :

$$(m + 1)^2 + (-2m)^2 + 5 > 0$$

Điều này đúng với mọi $m \in \mathbb{R}$. Vậy, quỹ tích của I là đường thẳng : $2x + y - 2 = 0$.

2. Chứng minh rằng có 2 đường tròn (C_m) tiếp xúc (C) .

(C) có tâm $O(0, 0)$, bán kính $R = 1$.

Trục đẳng phương (Δ) của (C) và (C_m) có phương trình :

$$(m + 1)x - 2my + 2 = 0$$

Khoảng cách từ O đến (Δ) :

$$d = \frac{2}{\sqrt{(m + 1)^2 + 4m^2}}$$

(C) tiếp xúc (Δ) :

$$\Leftrightarrow d = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(m + 1)^2 + 4m^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ hay } m = \frac{3}{5}$$

Mà : (C) tiếp xúc $(\Delta) \Leftrightarrow (C)$ tiếp xúc (C_m) .

Vậy : (C_m) tiếp xúc $(C) \Leftrightarrow m = 1 \text{ hay } m = \frac{3}{5}$.

Nghĩa là có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với (C) : đó là (C_{-1}) và $(C_{\frac{3}{5}})$.

Câu V :

1. Chứng minh các đường thẳng đồng quy.

- Gọi I là trung điểm của CD, J là trọng tâm của $\triangle BCD$, K là trọng tâm của $\triangle ACD$ ta có :

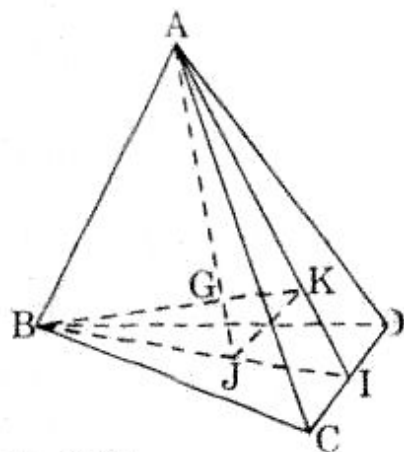
$$\frac{IJ}{IB} = \frac{IK}{IA} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow JK \parallel AB \Rightarrow \frac{JK}{AB} = \frac{1}{3} \quad (1)$$

- Gọi G là giao điểm của AJ và BK thì :

$$\frac{GJ}{GA} = \frac{JK}{AB} = \frac{1}{3} \quad [\text{do (1)}]$$

$$\Rightarrow G \text{ chia } AJ \text{ theo tỉ lệ } \frac{1}{3} \text{ (G thuộc đoạn AJ).}$$



Tóm lại, BK cắt AJ tại G với : $\frac{GJ}{GA} = \frac{1}{3}$.

- Tương tự, gọi L, M lần lượt là trọng tâm của $\triangle ABD$ và $\triangle ABC$ thì CL và DM cùng qua G.
- Tóm lại, AJ, BK, CL, DM đồng quy tại G (G gọi là trọng tâm của tứ diện ABCD).

2. Chứng minh rằng các thể tích bằng nhau.

- Gọi h và h' lần lượt là chiều cao phát xuất từ A và G của các hình chóp ABCD và GBCD thì : $\frac{V_{GBCD}}{V} = \frac{h'}{h} = \frac{1}{4}$ (V là thể tích của hình chóp ABCD). [Vì : $\frac{h'}{h} = \frac{AG}{AJ} = \frac{1}{4}$].

Suy ra : $V_{GBCD} = \frac{1}{4} V$

Tương tự : $V_{GCDA} = \frac{1}{4} V$; ...

Vậy : các thể tích của GBCD, GCDA, GDAB, GABC bằng nhau

Đề 35

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

2. Tìm a để đồ thị của hàm số $f(x)$ cắt đồ thị hàm số :

$$g(x) = a(3x^2 - 3ax + a)$$

tại ba điểm phân biệt với hoành độ dương.

Câu II :

1. Giải và biện luận theo tham số m phương trình sau :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} + \frac{1 + \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}}$$

2. Giải phương trình : $\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2}$.

Câu III :

1. Giải phương trình : $\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$.

2. Giả sử A, B, C là 3 góc của tam giác ABC thỏa mãn :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}\right) = 27$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Câu IV :

Cho mặt cầu có phương trình : $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 + (z - 1)^2 = 9$
và mặt phẳng (P) : $x + 2y + 2z + 11 = 0$.

Tìm điểm M trên mặt cầu sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là ngắn nhất.

Câu V :

Cho : $I_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx$ với $n = 2, 3, 4, \dots$

a) Tính I_2 .

b) Chứng minh : $I_n < \frac{\pi}{12}$ với $n = 3, 4, \dots$

Câu VI : (dành cho thí sinh thi theo chương trình chuyên ban).

a) Chứng minh rằng với $\forall x$ dương thì : $1 - \frac{x^2}{2} < \cos x$.

b) Tìm m để : $\cos^2 2x - 8 \sin x \cos x - 4m + 3 \geq 0$, với mọi $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Giải

Câu I :

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số : $y = x^3 - 3x + 1$.

MXĐ : $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 3$

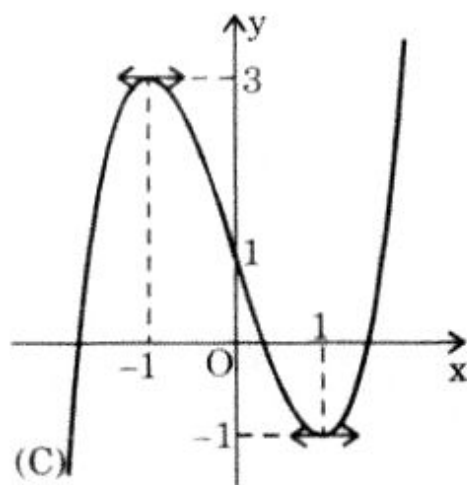
$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

Điểm uốn : $y'' = 6x \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y''	-		+	+	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	3	1	-1	$+\infty$

Đồ thị :



2. Tìm a để $f(x)$ và $g(x)$ có đồ thị cắt nhau tại ba điểm có hoành độ dương.

Phương trình hoành độ giao điểm :

$$\begin{aligned} x^3 - 3x + 1 &= a(3x^2 - 3ax + a) \\ \Leftrightarrow x^3 - 3ax^2 - 3(1 - a^2)x + 1 - a^2 &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt : $y = x^3 - 3ax^2 - 3(1 - a^2)x + 1 - a^2$

(1) có 3 nghiệm phân biệt dương khi đồ thị (C_a) của hàm số này cắt tia Ox tại 3 điểm phân biệt. Các điều kiện là :

- (C_a) cắt tia đối của tia Oy .
- (C_a) có $y_{\max} > 0$ và có $y_{\min} < 0$.

Do đó :

- (C_a) cắt tia Oy tại $A(0, 1 - a^2)$ nên :

$$1 - a^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < -1 \quad \text{hay} \quad 1 < a \quad (2)$$

- $y'' = 3x^2 - 6x - 3(1 - a^2)$

$$\Delta' = 9a^2 + 9(1 - a^2) = 9$$

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = a + 1 \quad \text{hay} \quad x = a - 1$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$a - 1$	$a + 1$	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

$-\infty \rightarrow y_{\max} \rightarrow y_{\min} \rightarrow +\infty$

- $y_{\max} = (a^2 - 3)(a - 1) > 0$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{3} < a < 1 \text{ hay } a > \sqrt{3}$ (3)

- $y_{\min} = (a^2 - 2a - 1)(a + 1) < 0$
 $\Leftrightarrow a < -1 \text{ hay } 1 - \sqrt{2} < a < 1 + \sqrt{2}$ (4)

(2), (3), (4) cho :

a	$-\sqrt{3}$	-1	$1 - \sqrt{2}$	1	$\sqrt{3}$	$1 + \sqrt{2}$
(2)						
(3)						
(4)						
KQ						

Vậy, $-\sqrt{3} < a < -1$ hay $\sqrt{3} < a < 1 + \sqrt{2}$.

Câu II :

1. Giải và biện luận phương trình :

$$x + \frac{1}{x} = \frac{1 - \sqrt{m}}{1 + \sqrt{m}} + \frac{1 + \sqrt{m}}{1 - \sqrt{m}} \quad (1)$$

Điều kiện : $x \neq 0$; $m > 0$; $m \neq 1$.

Lúc đó (1) $\Leftrightarrow x + \frac{1}{x} = \frac{1 + m}{1 - m}$

$$\Leftrightarrow (1 - m)x^2 - (1 + m)x + 1 - m = 0$$

Biệt số : $\Delta = (1 + m)^2 - 4(1 - m)^2$
 $= -3m^2 + 10m - 3$

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 3 \text{ hay } m = \frac{1}{3}$$

Có 3 trường hợp :

i) $m = 3$ hay $m = \frac{1}{3}$, (1) có nghiệm kép :

$$x_1 = x_2 = \frac{1+m}{2(1-m)}$$

• Khi $m = 3$ thì : $x_1 = x_2 = -1$

• Khi $m = \frac{1}{3}$ thì : $x_1 = x_2 = 1$.

ii) Khi $\frac{1}{3} < m < 3$, thì (1) vô nghiệm.

iii) Khi $0 < m < \frac{1}{3}$ hay $m > 3$ thì (1) có hai nghiệm phân biệt :

$$x_{1,2} = \frac{1+m \pm \sqrt{-3m^2 + 10m - 3}}{1-m}$$

Chú ý : khi $m = 1$ thì $x = 0$ (loại).

2. Giải phương trình :

$$\sqrt[3]{2x-1} + \sqrt[3]{x-1} = \sqrt[3]{3x-2} \quad (1)$$

$$\text{Đặt : } \left. \begin{array}{l} \alpha = \sqrt[3]{2x-1} \Rightarrow \alpha^3 = 2x-1 \\ \beta = \sqrt[3]{x-1} \Rightarrow \beta^3 = x-1 \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha^3 + \beta^3 = 3x-2 \quad (2)$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha + \beta = \sqrt[3]{\alpha^3 + \beta^3}$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = \alpha^3 + \beta^3 \quad [\text{do (2)}]$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ hoặc } \beta = 0 \text{ hoặc } \alpha + \beta = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ hoặc } x = 1 \text{ hoặc } x = \frac{2}{3}$$

Câu III :

1. Giải phương trình :

$$\frac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x} \quad (1)$$

$$\text{Điều kiện : } \begin{cases} \cos 2x \neq -1 \\ \sin x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì :} \quad 1 - \cos 2x = 2\sin^2 x \quad \text{và} \quad 1 + \cos 2x = 2\cos^2 x$$

$$\text{nên (1)} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 - \cos^2 x}{1 - \sin^2 x} = \frac{1 - \cos^3 x}{1 - \sin^3 x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{(1 - \sin x)(1 + \sin x + \sin^2 x)}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \cos x = 0 \\ \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x} = \frac{1 + \cos x + \cos^2 x}{1 + \sin x + \sin^2 x} \end{cases} \quad \text{với } \sin x \neq 1 \quad (1)$$

Có hai trường hợp :

$$\text{i)} \quad 1 - \cos x = 0 \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{ii) (2)} \Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 + \sin x + \sin^2 x) = (1 + \sin x)(1 + \cos x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x - \cos x = 0 \\ \sin x + \cos x + \sin x \cos x = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(3) \Leftrightarrow \sin x = \cos x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi \quad (k_1 \in \mathbb{Z})$$

$$(4) \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \quad (\text{với } t = \sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow t = -1 + \sqrt{2} \quad (\text{vì } -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \sin x + \cos x = -1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = -1 + \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{-1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \cos \alpha \quad (\text{đặt } \cos \alpha = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - x = \pm \alpha + k_2 2\pi$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} \mp \alpha - k_2 2\pi \quad (k_2 \in \mathbb{Z})$$

Tóm lại : phương trình có các nghiệm :

$$x = 2k\pi; \quad x = \frac{\pi}{4} + k_1\pi; \quad x = -\frac{\pi}{4} + \alpha - k_2 2\pi \quad (k, k_1, k_2 \in \mathbb{Z})$$

2. Giả sử A, B, C là 3 góc của tam giác ABC thỏa mãn :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}}\right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}}\right) = 27$$

Chứng minh tam giác ABC đều.

Trước hết ta chứng minh hai bất đẳng thức sau :

a) $\forall x, y, z$, ta có :

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq \left(1 + \sqrt[3]{xyz}\right)^3 \quad (1)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi : $x = y = z$.

b) $\forall$ tam giác ABC ta có :

$$\sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8} \quad (2)$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi tam giác ABC đều.

Thực vậy, ta có :

$$(1) \Leftrightarrow 1 + x + y + z + xy + yz + zx + xyz$$

$$\geq 1 + 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2} + xyz$$

$$\Leftrightarrow x + y + z + xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{xyz} + 3\sqrt[3]{(xyz)^2}$$

Theo Côsi, hiển nhiên (1) đúng và dấu bằng xảy ra khi $x = y = z$.

$$(2) \Leftrightarrow 1 - 8 \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4 \left[\cos \frac{A-B}{2} - \cos \frac{A+B}{2} \right] \sin \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4 \left[\cos \frac{A-B}{2} - \sin \frac{C}{2} \right] \sin \frac{C}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^2 \frac{C}{2} - 4\sin \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 1 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left[2\sin \frac{C}{2} - \cos \frac{A-B}{2} \right]^2 + \sin^2 \frac{A-B}{2} \geq 0 \quad (3)$$

(3) đúng, vậy (2) đúng.

Dấu bằng ở (2) chỉ xảy ra khi :

$$\begin{cases} \sin \frac{A-B}{2} = 0 \\ 2\sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A-B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = B \\ C = 60^\circ \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ tam giác ABC là tam giác đều.

Áp dụng (1) và (2) ta có :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) \geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} \right)^3$$

$$\geq \left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{8}}} \right)^3 = 27$$

Dấu bằng chỉ xảy ra khi :

$$\begin{cases} \sin \frac{A}{2} = \sin \frac{B}{2} = \sin \frac{C}{2} \\ \sin \frac{A}{2} \cdot \sin \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \text{Tam giác ABC là tam giác đều}$$

Vậy từ giả thiết :

$$\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{A}{2}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{B}{2}} \right) \left(1 + \frac{1}{\sin \frac{C}{2}} \right) = 27$$

Ta suy ra tam giác ABC là tam giác đều.

Câu IV :

Gọi I là tâm mặt cầu và R là bán kính mặt cầu, ta có $I(3; -2; 1)$ và $R = 3$.

- Qua I , vẽ đường thẳng $(\Delta) \perp mp(P)$.

Phương trình của (Δ) :

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 + 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 = t \\ y + 2 = 2t \\ z - 1 = 2t \end{cases}$$

$M = \text{mặt cầu} \cap (\Delta) \Rightarrow$ tọa độ M thỏa mãn :

$$t^2 + 4t^2 + 4t^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow t = \pm 1$$

Có hai điểm M : $M_1 (x = 4; y = 0; z = 3)$;

$M_2 (x = 2; y = -4; z = -1)$.

- Khoảng cách từ M_1 đến mặt phẳng (P) :

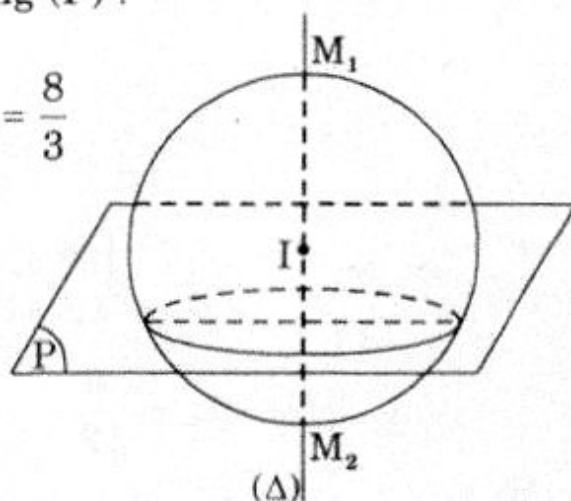
$$d_1 = \frac{|4 + 2 \cdot (0) + 2 \cdot (3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{10}{3}$$

- Khoảng cách từ M_2 đến mặt phẳng (P) :

$$d_2 = \frac{|1 \cdot 2 + 2(-4) + 2(-1)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{8}{3}$$

Như thế $d_1 > d_2$.

Vậy M_2 là vị trí của M ở trên mặt cầu có khoảng cách đến $mp(P)$ là ngắn nhất.



Câu V :**a) Tính I_2 .**

Vì :
$$I_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx \quad \text{với } n = 2, 3, 4, \dots$$

Nên :
$$I_2 = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$$

Đặt : $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$

và : $\sqrt{1-x^4} = \sqrt{1-u^2}$

Đổi cận :

x	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$
u	0	$\frac{1}{2}$

Vậy :
$$I_2 = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2} \arcsin u \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}$$

Tóm lại : $I_2 = \frac{\pi}{12}$.

b) Chứng minh : $I_n < \frac{\pi}{12}$ với $n = 3, 4, \dots$

Vì : $0 \leq x \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ nên khi $n = 3, 4, \dots$ thì :

$$x^{2n} < x^4 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^{2n}}} < \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

Do đó :
$$I_n = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx < \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{\pi}{12}$$

Vậy : $I_n < \frac{\pi}{12}$ với $n = 3, 4, \dots$

Câu VI :

a) Chứng minh với $\forall x$ dương :

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x.$$

Đặt : $y = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x$

Ta hãy chứng minh $y < 0$ khi $x > 0$.

Ta có : $y' = -x + \sin x$; $y'' = -1 + \cos x$

Bảng biến thiên :

x	0		$+\infty$
y''	0	-	$+\infty$
y'	0	$\nearrow$	$-\infty$
y	0	$\nearrow$	$-\infty$

Như vậy, $y < 0$ khi $x > 0$ (dpcm).

b) Tìm m :

Ta có : $\cos^2 2x - 8\sin x \cos x - 4m + 3 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 2x - 4\sin 2x - 4m + 3 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 2x + 4\sin 2x + 4m - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 4t + 4m - 4 \leq 0 & (\text{với } t = \sin 2x) \\ 0 \leq t \leq 1 & (\text{vì } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}) \end{cases}$$

Đặt : $f(t) = t^2 + 4t + 4m - 4$

Ta có : $\begin{cases} f(t) \leq 0 \\ 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Lập : $\Delta' = -4m + 8$. Ta có các trường hợp sau :

i) $\Delta' < 0 \Leftrightarrow m > 2 :$

Lúc đó $f(t) > 0, \forall t \in \mathbb{R}$. Vậy $m > 2$ bị loại.

ii) $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 2 :$

Lúc đó $f(t) = 0$ với $t = -2$ không thỏa $0 < t < 1$ nên $m = 2$ bị loại.

iii) $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 2 :$

Lúc này $f(t)$ có hai nghiệm : t_1, t_2 (giả sử $(t_1 < t_2)$).

Do đó : $f(t) \leq 0$ khi $t_1 \leq t \leq t_2$.

Khi $m > 2$ ta có :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(0) = 4m - 4 > 0 \\ \frac{S}{2} - 0 = 4 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 < t_2 < 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet f(1) = 1 + 4m > 0 \\ \frac{S}{2} - 1 = -5 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow t_1 < t_2 < 1$$

$$\Rightarrow t_1 < t_2 < 0 < 1$$

Như vậy : $t_1 \leq t \leq t_2 \Rightarrow t < 0 < 1$ (vì $(t_1, t_2) \cap (0, 1) = \emptyset$)

Tóm lại : không có m để cho bài toán được thỏa.

Đề 36

Câu 1 :

Cho hàm số : $y = \frac{2x^2(1-m)x + 1 + m}{-x + m}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.
2. Xác định m để hàm số (1) nghịch biến trong khoảng $2 < x < +\infty$.
3. Chứng minh rằng với mọi $m \neq -1$, các đường cong (1) đều tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Câu II :

1. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq \sqrt{x^2 - 5x + 4}$$

2. Hãy xác định a để hệ sau đây có nghiệm duy nhất :

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Câu III :

Tìm các số $x \in (0, 2\pi)$, thỏa mãn :

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x.$$

Câu IV :

Chứng minh rằng với ba số dương a, b, c bất kì ta luôn có :

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}$$

Câu V :

1. Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$

2. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm $A(0, 1, 1)$ vuông góc với đường thẳng :

$$(d_1) : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1} \quad \text{và cắt đường thẳng}$$

$$(d_2) : \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Câu VI :

Cho tứ diện $SABC$ có góc phẳng ở đỉnh S vuông.

1. Chứng minh rằng : $\sqrt{3} \cdot S_{ABC} \geq S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAC}$.
2. Biết rằng : $SA = a$; $SB + SC = k$. Đặt $SB = x$. Tính thể tích tứ diện $SABC$ theo a, k, x và xác định SB, SC để thể tích tứ diện $SABC$ lớn nhất.

Giải

Câu 1 :

Cho hàm số : $y = \frac{2x^2(1-m)x + 1 + m}{-x + m}$ (1)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

Khi $m = 1$ thì (1) trở thành : $y = \frac{2x^2 + 2}{-x + 1} = -2x - 2 + \frac{4}{-x + 1}$

MXĐ : $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Đạo hàm : $y' = -2 + \frac{4}{(-x + 1)^2}$

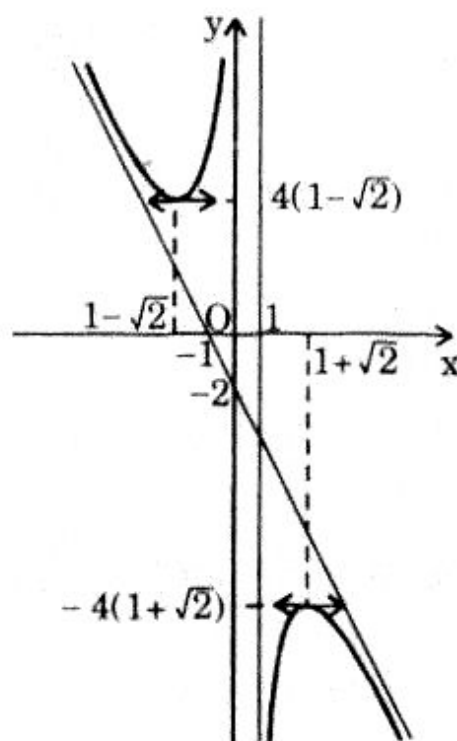
$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{2}$		1		$1 + \sqrt{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+		+	0	-
y	$+\infty$	$-4(1 - \sqrt{2})$	$+\infty$		$+\infty$	$-4(1 + \sqrt{2})$	$+\infty$

Đồ thị :

- Tiệm cận đứng : $x = 1$
- Tiệm cận xiên : $y = -2x - 2$



2. Xác định m để (1) nghịch biến trong khoảng $(2, +\infty)$.

Các điều kiện :

i) $x \neq m$

ii) Đạo hàm $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{m\}$ hoặc $y' = 0$ có 2 nghiệm x_1, x_2 (giả sử $x_1 < x_2$) với $x_1 < x_2 < 2$. Khi đó, $y' < 0$ với $2 < x$.

Ta có :
$$y' = \frac{-2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1}{(-x + m)^2}$$

Suy ra :

i) $x \neq m$ nên : $-2(m)^2 + 4m(m) - m^2 + 2m + 1 \neq 0$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 \neq 0 \quad \Leftrightarrow m \neq -1$$

ii) $y' = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4mx - m^2 + 2m + 1 = 0$

$$\Delta' = 4m^2 + 2(-m^2 + 2m + 1)$$

$$= 2m^2 + 4m + 2 = (m + 1)^2 > 0, \forall m \neq -1.$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của $y' = 0$. Ta phải có :

$$x_1 < x_2 < 2 \quad \Leftrightarrow \begin{cases} af(2) > 0 \\ \frac{S}{2} - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(-8 + 8m - m^2 + 2m + 1) > 0 \\ 2m - 2 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m < 5 - 3\sqrt{2}$$

Tóm lại : khi $m < 5 - 3\sqrt{2}$ và $m \neq -1$ thì hàm số nghịch biến trong $(2, +\infty)$.

3. Chứng minh rằng với $\forall m \neq -1$, các đường cong (1) đều tiếp xúc với một đường thẳng cố định tại một điểm cố định.

Ta cần chứng minh :

- i) Đồ thị của (1) đi qua một điểm cố định.
 ii) Đạo hàm của (1) tại điểm cố định đó là một hằng số.

Ta có :

$$\begin{aligned} \text{i) (1)} \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y-1)m = 2x^2 + x + 1 - xy \\ x \neq m \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x^2 + x + 1 + xy = 0 \\ x \neq m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ m \neq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy đồ thị của (1) luôn luôn đi qua $A(-1, 2)$ với $\forall m \neq -1$.

$$\text{ii) Khi } x = -1 \Rightarrow y' = \frac{-2 - 4m - m^2 + 2m + 1}{(1+m)^2} = -1 \quad (m \neq -1)$$

Vậy : $y' = -1$ tại A.

Tóm lại, các đồ thị của (1) luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng qua $A(-1, 2)$ có hệ số góc $y' = -1$. Đường thẳng này cố định và có phương trình $y = -x + 1$.

Câu II :

1. Giải bất phương trình :

$$\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x^2 - 4x + 3} \geq \sqrt{x^2 - 5x + 4} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-3)} \geq \sqrt{(x-1)(x-4)} \quad (2)$$

Bất phương trình này có nghĩa khi $x \leq 1$ hay $x \geq 4$. Có hai trường hợp :

i) $x \geq 4$, lúc đó :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}\sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-1}\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-2} + \sqrt{x-3} \geq 2\sqrt{x-4}$$

$$\Leftrightarrow 2x - 5 + 2\sqrt{x-2}\sqrt{x-3} \geq 4(x-4)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{x-2}\sqrt{x-3} \geq 2x - 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-2)(x-3) \geq (2x-11)^2 \\ 2x-11 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq \frac{97}{24} \\ x \geq \frac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \geq \frac{11}{2}.$$

Kết hợp $x \geq \frac{11}{2}$ và $x \geq 4$ ta được $x \geq \frac{11}{2}$.

ii) $x < 1$, lúc đó :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)(2-x)} + \sqrt{(1-x)(3-x)} \geq \sqrt{(1-x)(4-x)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1-x}\sqrt{2-x} + \sqrt{1-x}\sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{1-x}\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2-x} + \sqrt{3-x} \geq 2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow 5 - 2x + 2\sqrt{2-x}\sqrt{3-x} \geq 4(4-x)$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2-x}\sqrt{3-x} \geq -2x + 11$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(2-x)(3-x) \geq (-2x+11)^2 \\ -2x+11 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{97}{24} \leq x \leq \frac{11}{2} \\ x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \text{vô nghiệm.}$$

Ngoài ra : $x = 1$ là nghiệm của (2).

Tóm lại : bất phương trình (1) có nghiệm :

$$x = 1 \text{ hay } x \geq \frac{11}{2}.$$

2. Xác định a để hệ sau có nghiệm duy nhất.

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 4x^2 + ax \\ x^2 = y^3 - 4y^2 + ay \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Ta thấy $x = y$ là một nghiệm của hệ, lúc đó :

$$(1) \Leftrightarrow x^3 - 5x^2 + ax = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x^2 - 5x + a = 0$$

- Khi $x = 0$ thì $y = 0$. Vậy $(0, 0)$ là một nghiệm của hệ.
- Khi $x \neq 0$ thì $x^2 - 5x + a = 0$ phải vô nghiệm vì hệ chỉ có một nghiệm duy nhất. Lúc đó :

$$\Delta = 25 - 4a < 0 \Leftrightarrow a > \frac{25}{4}$$

Vậy : hệ có một nghiệm duy nhất là $(0, 0)$ khi $a > \frac{25}{4}$.

Câu III :

$$\frac{\sin 3x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos 2x}} = \cos 2x + \sin 2x, \quad x \in (0, 2\pi) \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{2 \cos 2x \cdot \sin x}{\sqrt{2} |\sin x|} = \cos 2x + \sin 2x \quad (2)$$

Có hai trường hợp :

i) $\sin x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \pi$ Lúc đó :

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos 2x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = \sqrt{2} - 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)$$

ii) $\sin x < 0 \Leftrightarrow \pi < x < 2\pi$ Lúc đó :

$$(2) \Leftrightarrow -\sqrt{2} \cos 2x = \sin x + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = -(1 + \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) + 2\pi.$$

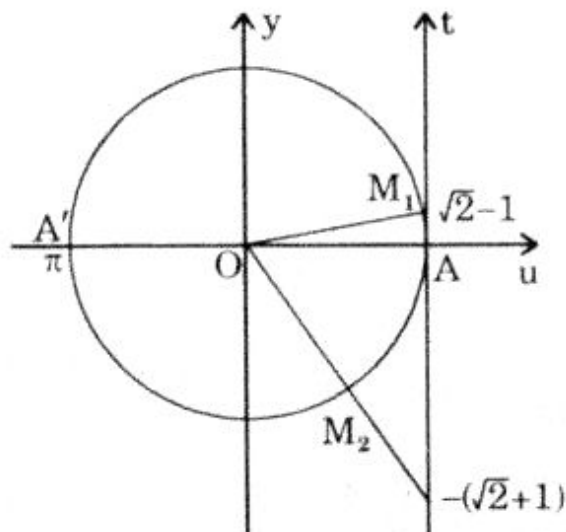
Tóm lại : (1) có hai nghiệm :

$$x_1 = \frac{1}{2} \arctg(\sqrt{2} - 1)$$

hay $x_2 = 2\pi - \frac{1}{2} \arctg(1 + \sqrt{2})$.

Trên hình vẽ : • $x_1 = AM_1$

• $x_2 = AA'M_2$



Câu IV :

Chứng minh rằng với a, b, c dương bất kì :

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3} \quad (1)$$

Ta thấy :

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2} \\ &= (ab) + (b - c) + (c - a) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \bullet \quad \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2} + \\ &+ \frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} = \\ &= 2 \left(\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra : } & \frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \right) \quad (1) \end{aligned}$$

• Mà : $\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}$

[vì $3a^2 - 3ab + 3b^2 - a^2 - ab - b^2 = 2(a - b)^2 \geq 0$]

Nên : $\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} \geq \frac{1}{3}(a + b)$

Tương tự : $\frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} \geq \frac{1}{3}(b + c)$

và : $\frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{1}{3}(c + a)$

Cộng vế :

$$\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{2}{3}(a + b + c)$$

Từ (1) ta có :

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{1}{3}(a + b + c)$$

Câu V :

1. Tính tích phân : $I = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} dx$

Đặt : $u = 1 + e^{-x} \Rightarrow du = -e^{-x} dx$

Cận tích phân :

x	0	1
u	2	$1 + e^{-1}$

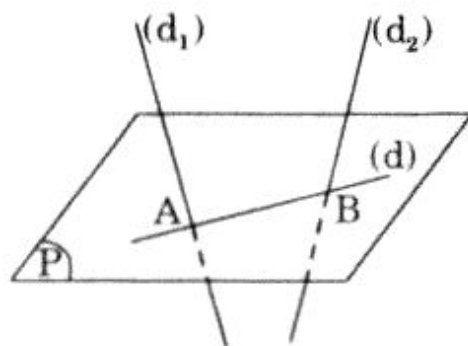
Suy ra : $I = \int_2^{1+e^{-1}} \frac{-du}{u} = \int_{1+e^{-1}}^2 \frac{du}{u} = \ln|u| \Big|_{1+e^{-1}}^2$

$$= \ln 2 - \ln(1 + e^{-1}) = \ln \frac{2e}{1 + e}$$

Vậy : $I = \ln \frac{2e}{1 + e}$

2. Lập phương trình đường thẳng :

- Vì $(d) \perp (d_1)$ nên có mp(P) qua A, chứa (d) và mặt phẳng $(P) \perp (d_1)$.
- Vì $mp(P) \perp (d_1)$ nên vectơ chỉ phương $\vec{a}_1 = (3, 1, 1)$ của (d_1) là



vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mp(P). Do đó mp(P) có phương trình :

$$3x + y + z + D = 0$$

Mà mp(P) đi qua A(0, 1, 1) nên $D = -2$.

Vậy, mp(P) : $3x + y + z - 2 = 0$

- mp(P) cắt (d_2) tại B nên tọa độ của B là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} 3x + y + z - 2 = 0 \\ x + y - z + 2 = 0 \\ x + 1 = 0 \end{cases}$$

Giải hệ này, ta được : $x = -1 ; y = 2 ; z = 3$.

Vậy : B(-1, 1, 3). Suy ra $\vec{AB} = (-1, 1, 2)$ là vectơ chỉ phương của (d)

Do đó (d) có phương trình : $\frac{x}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$.

Câu VI :

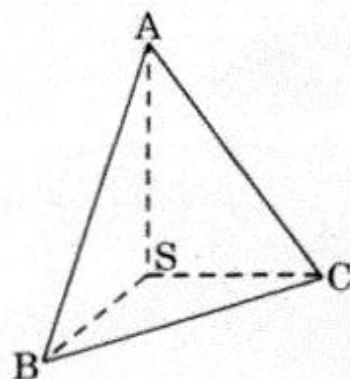
1. Chứng minh : $\sqrt{3} \cdot S_{ABC} \geq S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SAC}$.

Đặt $SA = a, SB = b, SC = c$. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ S lên mp(ABC).

- Ta có : $V_{SABC} = \frac{1}{3} S_{SBC} \cdot SA$

$$\Leftrightarrow V_{SABC} = \frac{1}{6} abc \quad (1)$$

- Mặt khác : $V_{SABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH \quad (2)$



$$\text{So sánh (1) và (2) ta được : } S_{ABC}.SH = \frac{1}{2}abc \quad (3)$$

$$\text{Mà : } \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2}$$

$$\Rightarrow SH = \frac{abc}{\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}}$$

Từ (3) ta có :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}$$

$$\text{Ta lại có : } \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{3} \geq \left(\frac{ab + bc + ca}{3} \right)^2$$

$$\text{Do đó : } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} \geq \frac{1}{2} \left(\frac{ab + bc + ca}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} S_{ABC} \geq \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}bc + \frac{1}{2}ca$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} S_{ABC} \geq S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} \quad (\text{dpcm}).$$

2. Thể tích của SABC theo a, k, x.

$$\text{Vì } SB + SC = k \quad \text{và} \quad SB = x \quad \text{nên} \quad SC = k - x$$

$$\text{Do đó : } V = \frac{1}{6} SA.SB.SC = \frac{1}{6} ax(k - x)$$

- Xác định SB, SC để V lớn nhất.

$$\text{Ta thấy } V \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x(k - x) \text{ lớn nhất.}$$

$$\text{Mà : } x + (k - x) = k \text{ (hằng)}$$

$$\text{Nên : } x(k - x) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow x = k - x \Leftrightarrow x = \frac{k}{2}$$

$$\text{Lúc đó : } SB = SC = \frac{k}{2}$$

$$\text{Vậy } V \text{ lớn nhất khi } SB = SC = \frac{k}{2}.$$

Đề 37

Câu I :

Cho hàm số : $y = x^3 + mx^2 + 1$ (C_m)

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -3$.
2. Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $y = -x + 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến với (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

Câu II :

Cho phương trình : $(2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = m$ (1)

1. Giải (1) khi $m = 4$.
2. Tìm m để phương trình (1) có 2 nghiệm.

Câu III :

Cho bất phương trình : $\frac{t^2 - 1}{t + 2} \geq t - m$ (1)

1. Giải bất phương trình khi $m = 1$.
2. Tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với mọi $t \geq 0$.

Câu IV :

Cho tam giác ABC có trung tuyến AM thỏa điều kiện $AM = AB$

1. Chứng minh : $\operatorname{tg} B = 3\operatorname{tg} C$.
2. Chứng minh : $\sin A = 2\sin(B - C)$

Câu V :

Trong mặt phẳng (P) cho đường tròn (C) , đường kính AB cố định và điểm M di động trên (C) . Gọi S là điểm cố định trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A . Hạ $AE \perp SB$ và $AN \perp SM$.

1. Chứng minh $AN \perp EN$.
2. Chứng minh khi M di động trên (C) thì N luôn thuộc một đường tròn cố định.

Giải

Câu 1:

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số khi $m = -3$.

Khi $m = -3$ thì hàm số $y = x^3 + mx^2 + 1$ trở thành :

$$y = x^3 - 3x^2 + 1$$

MXĐ : $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x$

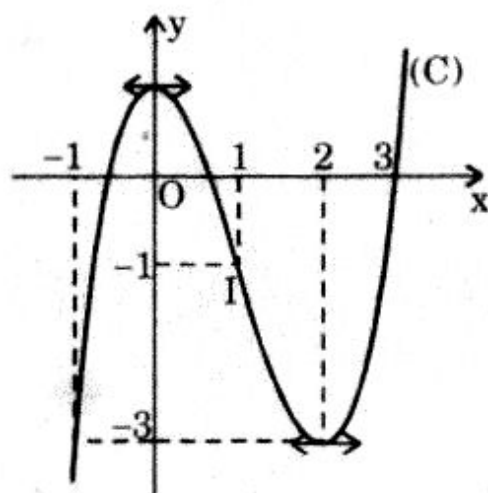
$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ hay } x = 2$$

Điểm uốn : $y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$				
y''		-	0	+	+				
y'		+	0	-	0	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị :



2. Tìm m để (C_m) cắt đường thẳng $(D) : y = -x + 1$...

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và (D) :

$$x^3 + mx^2 + 1 = -x + 1$$

$$\Leftrightarrow x(x^2 + mx + 1) = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + mx + 1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

(C_m) cắt (D) tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

Do đó, ta chỉ cần (2) có $\Delta > 0 \Leftrightarrow m < -2$ hay $m > 2$.

Theo đề bài, $A(0, 1)$ nên B, C có hoành độ là nghiệm của (2) .

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại $B : y'(x_B)$.

Hệ số góc của tiếp tuyến của (C_m) tại $C : y'(x_C)$.

Hai tiếp tuyến này vuông góc với nhau.

$$\Leftrightarrow y'(x_B) \cdot y'(x_C) = -1$$

$$\Leftrightarrow (3x_B^2 + 2mx_B)(3x_C^2 + 2mx_C) = -1$$

$$\Leftrightarrow x_B x_C [9x_B x_C + 6m(x_B + x_C) + 4m^2] = -1$$

$$\Leftrightarrow 9 + 6m(-m) + 4m^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 = 10 \Leftrightarrow m = \pm \sqrt{5}$$

Hai giá trị này của m thỏa : $m < -2$ hay $m > 2$ nên được nhận
[Nhớ : $y' = 3x^2 + 2mx$; $x_B \cdot x_C = 1$; $x_B + x_C = -m$].

Vậy : khi $m = \pm \sqrt{5}$ thì hai tiếp tuyến của (C_m) tại B và C vuông góc với nhau.

Câu II :

$$\text{Cho phương trình : } (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = m \quad (1)$$

1. Giải phương trình khi $m = 4$.

$$\text{Khi } m = 4 \Rightarrow (1) \text{ trở thành : } (2 + \sqrt{3})^x + (2 - \sqrt{3})^x = 4 \quad (2)$$

$$\text{Đặt : } t = (2 + \sqrt{3})^x \text{ thì } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} t + \frac{1}{t} = 4 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 4t + 1 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \pm 1$$

2. Tìm m để (1) có 2 nghiệm.

Vấn đặt : $t = (2 + \sqrt{3})^x$

$$\begin{aligned} \text{thì (1)} &\Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - mt + 1 = 0 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ m > 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \text{ hay } m > 2 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 2 \end{aligned}$$

[nhớ $t + \frac{1}{t} = m$ và $t > 0$ nên $m > 0$].

Câu III :

Cho bất phương trình :

$$\frac{t^2 - 1}{t + 2} \geq 1 - m \quad (1)$$

1. Giải bất phương trình khi $m = 1$.

Khi $m = 1$ thì (1) trở thành : $\frac{t^2 - 1}{t + 2} \geq t - 1 \quad (2)$

$$\Leftrightarrow \frac{-t - 1}{t + 2} \geq 0 \Leftrightarrow -2 < t \leq 1.$$

2. Tìm m để (1) nghiệm đúng với mọi $t \geq 0$.

Ta có (1) $\Leftrightarrow \frac{(m - 2)t + 2m - 1}{t + 2} \geq 0 \quad (3)$

Có hai trường hợp :

i) Khi $m \geq 2$ thì (3) thỏa với $\forall t \geq 0$.

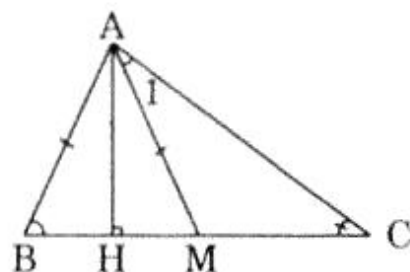
ii) Khi $m < 2$ thì (2) $\Leftrightarrow t \leq \frac{2m - 1}{m - 2}$ [$t \geq 0 \Rightarrow t + 2 > 0$], nên (1) không thỏa với $\forall t \geq 0$.

Tóm lại : khi $m \geq 2$ thì (1) nghiệm đúng với $\forall t \geq 0$.

Câu IV :

1. Chứng minh : $\operatorname{tg} B = 3\operatorname{tg} C$.

Gọi AH là đường cao của $\triangle ABC$ xuất phát từ A thì H là trung điểm của BM vì $AB = AM$.



• $\triangle AHM$ vuông tại H cho :

$$\operatorname{tg} B = \frac{AH}{BH} \quad (1)$$

• $\triangle AHC$ vuông tại H cho : $\operatorname{tg} C = \frac{AH}{HC} \quad (2)$

Mà : $HC = 3HB$ nên $\operatorname{tg} B = 3\operatorname{tg} C$ [do (1) và (2)]

2. Chứng minh : $\sin A = 2\sin(B - C)$

$\triangle ACM$ có M là góc ngoài $\Rightarrow \hat{M} = \hat{A}_1 + \hat{C}$

Mà : $\hat{M} = \hat{B}$

Vậy : $\hat{A}_1 = \hat{B} - \hat{C}$

Suy ra : $dt(\triangle ACM) = \frac{1}{2} AM \cdot AC \cdot \sin(B - C)$

Mà : $dt(\triangle ABC) = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A$

và : $dt(\triangle ABC) = 2dt(\triangle ACM)$

Vậy : $\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot AC \cdot \sin(B - C)$

$\Rightarrow \sin A = 2\sin(B - C)$.

Cách khác :

$$\operatorname{tg} B = 2\operatorname{tg} C \Rightarrow \sin B \cdot \cos C = 3\sin C \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \sin B \cdot \cos C - \sin C \cdot \cos B = 2\sin C \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \sin(B - C) = 2\sin C \cdot \cos B$$

$$\Rightarrow \sin(B - C) = \sin(B + C) - \sin(B - C)$$

$$\Rightarrow 2\sin(B - C) = \sin A \quad [\text{vì } A = \pi - (B + C)]$$

Câu V :

1. Chứng minh : $AN \perp EN$.

- $M \in (C) \Rightarrow MB \perp AM$ (1)

AS $\perp$ mp (AMB)

$$\Rightarrow \text{MB} \perp \text{SA} \quad (2)$$

(1) và (2) cho :

$$\text{MB} \perp \text{mp (SAM)} \Rightarrow \text{AN} \perp \text{MB} \quad (3)$$

$$\text{Mà } AN \perp SM \quad (4)$$

(3) và (4) cho :

$$AN \perp_{mp} (SMB) \Rightarrow AN \perp NE.$$

2. N thuộc đường tròn cố định.

Ta có : $\left. \begin{array}{l} AE \perp SB \text{ (gt)} \\ AN \perp SB \text{ (cmt)} \end{array} \right\} \Rightarrow SB \perp mp \text{ (AEN) tại E.}$

Ngoài ra A, E cố định nên $mp(AEN)$ cố định $\Rightarrow N \in mp(AEN)$ cố định. Trong mặt phẳng này, N nhìn AE cố định dưới một góc vuông nên N thuộc đường tròn đường kính AE nằm trong mặt phẳng cố định qua A và vuông góc với SB tại E.

